Vakuutusyhtiön vararikkotodennäköisyyksien simulointi alieksponentiaalisille korvausvaateille

Roope Aalto

8. tammikuuta 2018

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Roope Aalto

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Vakuutusyhtiön vararikkotodennäköisyyksien simulointi alieksponentiaalisille korvausvaateille

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Tammikuu 2018	48 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tutkielmassa tutkitaan vakuutusyhtiön vararikko-ongelmaa Cramér–Lundbergin mallissa. Mallin mukaan vakuutusyhtiön kassavirrat muodostuvat asiakkaiden maksamista vakuutusmaksuista ja vakuutusyhtiön maksamista korvauksista. Lisäksi mallissa yhtiöllä oletetaan liiketoiminnan alussa olevan alkupääomaa. Tällöin vararikolla tarkoitetaan tilannetta, missä maksettavat korvaukset ylittävät alkupääoman, sekä saadut vakuutusmaksut, jolloin yhtiön pääoma laskee negatiiviseksi. Tutkielmän tavoitteena on löytää menetelmä laadukkaan arvion muodostamiseksi vararikkotodennäköisyydelle annetulla alkupääomalla, sekä soveltaa tätä menetelmää numeeristen arvojen tuottamiseksi MATLAB-simuloinnilla.

Mallissa asiakkaat maksavat vakuutusmaksuja vakiotasolla, mutta korvausvaateiden suuruus ja saapuminen yhtiöön oletetaan satunnaiseksi, jolloin niitä mallinnetaan stokastisina prosesseina. Korvausvaateiden suhteen rajoitutaan alieksponentiaalisesti jakautuneisiin korvausvaateisiin, sillä ne ovat reaalimaailmassa olennainen jakaumaperhe. Johdannon jälkeen luvuissa kaksi ja kolme käydään läpi tutkielman aiheen käsittelyssä tarvittavaa teoriaa ja käsitteistöä todennäköisyyksistä ja stokastisista prosesseista.

Luvussa neljä käsitellään vararikkoteoriaa. Luvussa esitellään tutkielmassa tarkasteltavan Cramér–Lundbergin mallin oletuksia ja ominaisuuksia. Näiden perusteella määritellään yhtiön pääoman muutosta ajan kuluessa kuvaava riskiprosessi ja edelleen yhtiön vararikkotodennäköisyys. Tämän lisäksi tarkastellaan hieman yhtiön asiakkaiden maksamien vakuutusmaksujen tason optimaalista määräämistä, sekä määritetään yleisesti vararikkotodennäköisyydelle keskeisiä arvioita ja esitys Pollaczek–Khinchinen kaavan avulla.

Viides luku koostuu estimoinnin ja arvioinnin teoriasta. Siinä tutustutaan lyhyesti estimoinnin periaatteisiin ja käsitteisiin, sekä esitellään yleisimpiä kriteereitä estimointimenetelmän hyvyyden arviointiin. Tämän jälkeen tarkastellaan estimointimenetelmän tehokkuuden käsitettä vararikkotodennäköisyyksien simuloinnin kannalta ja perustellaan logaritmisen tehokkuuden valintaa laatukriteeriksi. Luvun kuusi aluksi perustellaan vararikotodennäköisyyksien arvioimiseen käytettävän menetelmän muodostamista, jonka jälkeen esitetään ja todistetaan tutkielman päätulos. Viimeisessä luvussa esitetään MATLAB-ohjelmistolla tuotetut numeeriset tulokset.

Tutkielmassa pyritään keskittymään aiheen kannalta olennaisiin asioihin, jolloin osa esitettyjen tuloksien todistuksista sivuutetaan. Tällöin osoitetaan teoksia, joihin lukija voi kiinnostuksensa mukaan tutustua. Suoraviivainen jatko tutkielmaan olisi tarkastella vastaavaa tutkimusongelmaa mallissa, joka kuvastaisi vakuutusyhtiön toimintaa Cramér–Lundbergin mallia realistisemmin. Tällöin yhtiön riskiprosessiin tulisi sisällyttää ainakin satunnaiset sijoitustuotot, yhtiön liiketoiminnan kulut ja mahdollisesti myös muita kassavirtoja.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Vararikkotodennäköisyys, Cramér–Lundebergin malli, Alieksponentiaalisuus, Simulointi

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Finanssimaailman toimijat kohtaavat nykyaikana paljon vakavaraisuuden- ja riskienhallintaan liittyvää sääntelyä. Sääntelyn keskeisenä tavoitteena on ehkäistä toimijoiden vararikkoon ajautumista ja näin ollen tehostaa asiakkaiden etujen turvaa, sekä edistää vakaata talouden kehitystä. Eräs tämän tavoitteen saavuttamisen työkaluista on yksittäisen toimijan vararikkotodennäiköisyyden määrittäminen tai arviointi. Tämä tutkielma tarkastelee vakuutusyhtiön vararikkotodennäköisyyksiä klassisessa Cramér–Lundebergin mallissa. Se on hieman reaalimaailmaa yksinkertaisempi, sillä se olettaa yhtiön kassavirtojen muodostuvan vain vakiotasolla maksetuista vakuutusmaksuista, sekä asiakkaille maksetuista korvauksista.

Cramér–Lundbergin malli on saanut nimensä ruotsalaisilta matemaatikoilta Harald Cramérilta (1893–1985) ja Filip Lundbergilta (1876–1965). Lundberg esitteli mallin vuonna 1903 julkaistussa väitöskirjassaan ja loi näin pohjan vakuutusmatemaattiselle vararikkoteorialle. Avainasemassa Lundbergin työssä oli havainto Poissonin prosessien keskeisyydestä vakuutusmalleissa. Harald Cramér myöhemmin jatkoi Lundbergin mallin tutkimista liittäen mukaan stokastisten prosessien teoriaa. Malli tunnetaan myös klassisena yhdistettynä Poisson riskimallina tai klassisena riskiprosessina. Mallissa yhtiö aloittaa liiketoimintansa alkupääomalla U_0, jonka valinta luonnollisesti vaikuttaa vararikkotodennäköisyyteen. Tällöin siis yhtiön todennäköisyys ajautua vararikkoon on alkupääoman funktio.

Tutkielman tavoite ei ole yhtiön vararikkotodennäköisyyden tarkka määrittäminen, vaan sen sijaan löytää menetelmä laadukkaan arvion tuottamiseksi, sillä usein tarkka todennäköisyys on vaikeaa tai jopa mahdotonta määrittää. Yhtiön vastaanottamien korvausvaateiden suuruus ja saapuminen ajatellaan mallissa satunnaiseksi, jolloin niitä mallinnetaan stokastisena prosessina. Reaalimaailmassa suurimman uhan yhtiölle muodostaa pienten korvausvaateiden summan sijaan yksi iso korvausvaade, minkä vuoksi tutkielmassa rajoitutaan alieksponentiaalisesti jakautuneisiin korvausvaateisiin, joilla on tämä yhtiön kannalta vaarallinen ominaisuus [7]. Tuotetun arvion laatukriteerinä käytetään logaritmista tehokkuutta. Lisäksi tutkielmassa sovelletaan löydettyä menetelmää tuottaen simuloimalla arvioita vararikkotodennäköisyyksistä eri alkupääomilla. Simulointi on suoritettu käyttäen MATLAB R2016a-ohjelmistoa.

Tutkielman rakenne on seuraava. Luvuissa kaksi ja kolme käydään lyhyesti läpi tutkielman kannalta oleellista teoriaa ja käsitteistöä todennäköisyysteoriasta ja stokastisista prosesseista. Näiden kappaleiden keskeisimpiä lähdeteoksia ovat [4], [9] ja [10]. Neljäs luku käsittelee tarkasteltavan Cramér–Lundbergin mallin oletuksia ja ominaisuuksia yleisessä tapauksessa. Luvussa viisi tutustutaan estimoinnin periaatteisiin ja perustellaan logaritmisen tehokkuuden valintaa laatukriteeriksi. Kuudennessa luvussa muodostetaan menetelmä vararikkotodennäköisyyksien arvioimiseksi, sekä osoitetaan menetelmän tehokkuus valitun laatukriteerin mielessä. Viimeisessä luvussa sovelletaan löydettyä menetelmää muodostamalla konkreettisia numeerisia arvioita vararikkotodennäköisyyksille MATLAB-simuloinnilla. Simuloinnissa käytetyt koodit löytyvät liitteestä A. Tutkielman tärkein lähdeteos on [7]. Tämän lisäksi erittäin hyödyllisiä olivat myös teokset [9] ja [18], sekä viidennen luvun kannalta teokset [13] ja [14].

Luku 2

Todennäköisyysteoria

Vararikkoteoreettisissa ongelmissa avainasemassa ovat ilmiöt, joiden esiintymiseen liittyy satunnaisuutta. Tässä kappaleessa käydään lyhyesti läpi myöhemmin tarvittavaa todennäköisyyksien teoriaa, käsitteistöä ja tuloksia. Kappaleessa esitettävien tulosten todistukset sivuutetaan, sillä ne eivät ole tutkielman kannalta keskeisiä. Sivuutettavat yksityiskohtaiset todistukset esitetään muun muassa teoksissa [1], [2], [3] ja [4], jotka käsittelevät kappaleen aihepiiriä perusteellisemmin.

2.1 Todennäköisyysavaruus

Satunnaisilmiöiden tarkasteluun käytettävää matemaattista mallia kutsutaan todennäköisyysavaruudeksi (tai vaihtoehtoisesti todennäköisyyskentäksi). Todennäköisyysavaruus koostuu kolmikosta $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, joille pätee:

1) Ω on epätyhjä perusjoukko tai otosavaruus, joka koostuu satunnaisilmiön alkeistapauksista.

2) $\mathcal{F}$ on sigma-algebra joukossa Ω eli kokoelma perusjoukon Ω osajoukkoja, joille pätee seuraavat ehdot:

   i) Perusjoukko Ω sisältyy kokoelmaan $\mathcal{F}$.

   ii) Jos joukko $\mathcal{A}$ kuuluu kokoelmaan $\mathcal{F}$, niin tällöin myös joukon $\mathcal{A}$ komplementti $\mathcal{A}^C$ kuuluu kokoelmaan $\mathcal{F}$.

   iii) Kokoelman $\mathcal{F}$ jäsenten kaikki numeroituvat yhdisteet kuuluvat myös kokoelmaan $\mathcal{F}$.

3) $\mathbb{P}$ on jokaisessa $\mathcal{F}$:n joukossa määritelty kuvaus, joka täyttää seuraavat todennäköisyysmitan ehdot:

i) Kuvaus $\mathbb{P}$ on mitta

ii) Perusjoukon mitta on 1, eli $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Olkoon A kokoelma perusjoukon Ω osajoukkoja. Tällöin merkintä $\sigma(A)$ tarkoittaa kokoelman A tuottamaa sigma-algebraa, joka on yksikäsitteinen pienin kokoelman A joukot sisältävä sigma-algebra.

Paria $(\Omega, \mathcal{F})$ kutsutaan mitta-avaruudeksi ja kokoelman $\mathcal{F}$ jäseniä mitallisiksi joukoiksi. Todennäköisyyslaskennassa näistä mitallisista joukoista puhutaan usein tapahtumina ja tapahtuman A toteutumisen todennäköisyys on sen mitta todennäköisyysmitan $\mathbb{P}$ suhteen, eli $\mathbb{P}(A)$.

Joskus tapahtuma B vaikuttaa tapahtuman A todennäköisyyteen, jolloin puhutaan ehdollisesta todennäköisyydestä. Tällöin tapahtuman A todennäköisyys on eri riippuen onko tapahtuma B sattunut vai ei. Tapahtuman A ehdollinen todennäköisyys ehdolla, että B on tapahtunut määritellään

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \tag{2.1}$$

kun $\mathbb{P}(B) > 0$.

2.2 Satunnaismuuttujat ja jakaumat

Määritelmä 2.2. Oletetaan $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruudeksi. Mitallista kuvausta $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ kutsutaan satunnaismuuttujaksi (tässä tapauksessa reaaliarvoiseksi).

Satunnaismuuttujat voivat kuvautua myös reaaliluvuista poikkeaviin joukkoihin. Reaaliarvoiset satunnaismuuttujat ovat kuitenkin hyvin merkittävä ja tässä tapauksessa kaikkein relevantein ryhmä, joten rajoitutaan vain niihin. Tällöin tärkeä mitta-avaruus on reaaliluvut varustettuna reaalilukujen Borel-sigma-algebralla $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, eli $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Määritelmä 2.3. Satunnaismuuttujan X jakauma μ on todennäköisyysmitta mitta-avaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, jonka määrittelee ehto

$$\mu(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A), \qquad A \in \mathcal{B}.$$

Määritelmä 2.4. Olkoon X satunnaismuuttuja. Tällöin funktio $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

on satunnaismuuttujan X kertymäfunktio.

Satunnaismuuttujat voivat olla joko diskreettejä, jatkuvia tai näiden molempien sekoituksia. Pelkästään diskreettien tai jatkuvien satunnaismuuttujien käsittelyyn on olemassa paljon käteviä tuloksia, mutta osittain jatkuvien ja osittain diskreettien satunnaismuuttujien käsittely menee helposti hyvin monimutkaiseksi.

Määritelmä 2.5. Satunnaismuuttujan X jakauma on diskreetti, jos sen tulojoukko on numeroituva.

Määritelmä 2.6. Diskreetin satunnaismuuttujan X pistetodennäköisyysfunktio on funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Määritelmä 2.7. Satunnaismuuttujalla X on jatkuva jakauma, mikäli sen kertymäfunktio on jatkuva kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on X:n tiheysfunktio, jos

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Tällöin myös

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx, \qquad a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

Mikäli jakaumaltaan jatkuvan satunnaismuuttujan kertymäfunktio on derivoituva melkein kaikkialla, voidaan tiheysfunktio muodostaa kertymäfunktion derivaattana. Jakaumaltaan jatkuvaa tai diskreettiä satunnaismuuttujaa kutsutaan myös jatkuvaksi satunnaismuuttujaksi tai vastaavasti diskreetiksi satunnaismuuttujaksi. Mikäli epäselvyys antaa sille aihetta, merkitään pistetodennäköisyys-, tiheys- tai kertymäfunktion alaindeksiin selvennys kyseisen funktion omaavasta satunnaismuuttujasta. Esimerkiksi $F_{Y_1}(x)$ tarkoittaa satunnaismuuttujan Y_1 kertymäfunktiota.

Jos X ja Y ovat samalla perusjoukolla määriteltyjä satunnaismuuttujia, eli $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ja $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, niin tällöin pari $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ muodostaa kaksiulotteisen satunnaisvektorin.

Määritelmä 2.8. Satunnaisvektorin (X, Y) jakauma eli satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauma on $\mathbb{R}^2$:n osajoukoilla A määritelty kuvaus

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in A).$$

Määritelmä 2.9. Olkoon (X, Y) satunnaisvektori. Tällöin funktio $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

on (X, Y):n kertymäfunktio, eli satunnaismuuttujien X ja Y yhteiskertymäfunktio.

Vastaavasti kuin yksiulotteisessa tapauksessa, jatkuvan satunnaisvektorin (X, Y) tiheysfunktio on $f(x, y)$, ja

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} ds \int_{-\infty}^{y} f(s,t)dt. \tag{2.10}$$

Ehdollisten todennäköisyyksien tapauksessa, ehdollinen tiheysfunktio määritellään seuraavasti.

Määritelmä 2.11. Olkoon satunnaisvektorilla (X, Y) jatkuva jakauma tiheysfunktiolla $f_{X,Y}$. tällöin satunnaismuuttujan X ehdollinen tiheysfunktio ehdolla $Y = y$ on

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

kun $f_Y(y) > 0$.

2.3 Odotusarvo ja momentit

Odotusarvo ja muut momentit ovat erittäin tärkeitä satunnaismuuttujan jakauman tunnuslukuja, jotka antavat tietoa jakauman luonteesta. Kaikkien momenttien kokoelman avulla jakauma voidaan määritellä yksikäsitteisesti.

Satunnaismuuttujan odotusarvo määritellään yleisesti integraalina yli otosavaruuden Ω todennäköisyysmitan $\mathbb{P}$ suhteen.

Määritelmä 2.12. Satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P},$$

mikäli $\mathbb{E}(|X|)$ on äärellinen, jolloin odotusarvo on olemassa. Tai vaihtoehtoisesti

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x),$$

mikäli F on X:n kertymäfunktio.

Edellinen määritelmä ei ota lainkaan kantaa jakauman jatkuvuuteen, jolloin se pätee kaikenlaisille satunnaismuuttujille. Kun tarkasteltava satunnaismuuttuja on joko diskreetti tai jatkuva, voidaan odotusarvo määritellä käytännöllisemmällä tavalla.

Määritelmä 2.13. Satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$(i) \quad \mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \Omega} x f(x) \quad \text{, kun } X \text{ on diskreetti}$$

$$(ii) \quad \mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx \quad \text{, kun } X \text{ on jatkuva.}$$

Funktio f on joko tiheysfunktio tai pistetodennäköisyysfunktio riippuen onko X diskreetti vai jatkuva.

Lause 2.14. *Olkoon X satunnaismuuttuja, sekä olkoon $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mitallinen funktio, jolle $\mathbb{E}(|g(X)|) < \infty$.*

(i) Jos X on diskreetti pistetodennäköisyysfunktiolla f, niin

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in \Omega} g(x) f(x).$$

(ii) Jos X on jatkuva tiheysfunktiolla f, niin

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx.$$

Listataan seuraavassa lauseessa odotusarvon yleisiä ominaisuuksia.

Lause 2.15. *Olkoon X ja Y satunnaismuuttujia, sekä $\mathbb{E}(X) < \infty$ ja $\mathbb{E}(Y) < \infty$. Odotusarvolla on tällöin seuraavat ominaisuudet.*

(a) Jos $X \geq 0$, niin $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

(b) Jos $X \geq 0$ ja $\mathbb{E}(X) = 0$, niin $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.

(c) Jos $X < Y$, niin $\mathbb{E}(X) < \mathbb{E}(Y)$.

(d) Jos $c \in \mathbb{R}$, niin $\mathbb{E}(c) = c$.

(e) Jos $c, d \in \mathbb{R}$, niin $\mathbb{E}(cX + dY) = c\mathbb{E}(X) + d\mathbb{E}(Y)$.

(f) Jos $X \perp\!\!\!\perp Y$ (X ja Y riippumattomia), niin $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

(g) Jos X ja Y ovat samoin jakautuneet, niin $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.

Odotusarvo on jakauman ensimmäinen origomomentti, joita kutsutaan myös pelkästään momenteiksi. Origomomentin lisäksi toinen tärkeä ja käytännöllinen momentti on keskusmomentti.

Määritelmä 2.16. Satunnaismuuttujan X n. origomomentti (tai momentti) μ_n on

$$\mu_n = \mathbb{E}(X^n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

mikäli $\mathbb{E}(|X^n|) < \infty$.

Määritelmä 2.17. Satunnaismuuttujan X n. keskusmomentti ξ_n on

$$\xi_n = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

mikäli kyseinen odotusarvo on olemassa.

Toinen keskusmomentti on myös erityisen tärkeä jakaumien tunnusluku, varianssi, jota merkitään myös $\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X)$. Jakauman momentit voidaan myös määritellä yleisesti pisteen x_0 suhteen, jolloin origomomentit ja keskusmomentit ovat näistä erikoistapauksia. Tällöin origomomentit ovat momentteja pisteen $x_0 = 0$, eli origon suhteen ja keskusmomentit pisteen $x_0 = \mathbb{E}(X)$, eli jakauman odotusarvon suhteen.

Määritelmä 2.18. Satunnaismuuttujan X momentit generoiva funktio on kuvaus $M_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, jolle

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}).$$

Lause 2.19. *Jos momentit generoiva funktio $M_X(t)$ on reaalisena olemassa jossakin origon ympäristössä $|t| < h$, jossa $h > 0$, niin $M_X(t)$ on äärettömän monta kertaa derivoituva origossa, X:n kaikki momentit ovat olemassa, ja M_X voidaan esittää suppenevana Taylorin sarjana*

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbb{E}(X^k), \qquad |t| < h.$$

Edellä esitetty lause on erittäin hyödyllinen momenttien muodostamisessa, sillä ne saadaan suoraviivaisesti derivoimalla esitettyä Taylorin sarjamuotoa. Momentit generoivalla funktiolla on siis ominaisuus

$$\mathbb{E}(X^k) = M_X^{(k)}(0), \qquad k \geq 1.$$

Lause 2.20. *Seuraavat ominaisuudet pätevät momentit generoiville funktioille.*

(i) *Jos $a, b \in \mathbb{R}$, niin $M_{aX+b}(t) = e^{tb}M_X(at)$.*

(ii) *Jos $X \perp\!\!\!\perp Y$, niin $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$.*

(iii) *Jos $M_X(t) = M_Y(t)$ jossakin origon ympäristössä, niin X ja Y ovat samoin jakautuneet.*

Vastaavasti kuin ehdollisen todennäköisyyden tapauksessa, toisistaan riippuvien tapahtumien odotusarvoon vaikuttaa onko tieto on toinen tapahtuma tapahtunut vai ei. Tällöin tapahtuman A ehdollinen odotusarvo ehdolla, että B on tapahtunut, on $\mathbb{E}(A \mid B)$. Satunnaismuuttujille se määritellään ehdollisten jakaumien avulla.

Määritelmä 2.21. Satunnaismuuttujan X odotusarvo ehdolla $Y = y$ on sen ehdollisen jakauman odotusarvo,

$$(i) \quad \mathbb{E}(X|Y=y) = \sum_{x \in \Omega} x f_{X|Y}(x|y) \quad \text{, kun } X \text{ on diskreetti}$$

$$(ii) \quad \mathbb{E}(X|Y=y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x|y) dx \quad \text{, kun } X \text{ on jatkuva.}$$

Esitetään seuraavaksi ehdollisen odotusarvon ominaisuuksia, jotka pätevät melkein varmasti.

Lause 2.22. *Olkoon X, Y ja Z satunnaismuuttujia ja $\mathcal{G}$ jokin sigma-algebra. Tällöin*

(a) $\mathbb{E}(aX + bY|Z) = a\mathbb{E}(X|Z) + b\mathbb{E}(Y|Z)$, *kaikilla* $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Jos $X \geq 0$, *niin* $\mathbb{E}(X|Y) \geq 0$.

(c) Jos $X \perp\!\!\!\perp Y$, *niin* $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X)$.

(d) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z)) = \mathbb{E}(X)$.

(e) Jos X on $\mathcal{G}$-mitallinen, eli $X \in \mathcal{G}$, niin $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X$.

(f) Jos Y on $\mathcal{G}$-mitallinen, niin $\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

2.4 Erityisiä jakaumia

Esitetään määritelmiä ja joitain käytännöllisiä ominaisuuksia tärkeimmille jatkossa tarvittaville jakaumille.

Määritelmä 2.23. Diskreetin satunnaismuuttujan X sanotaan olevan Bernoulli-jakautunut parametrilla p, jos sen pistetodennäköisyysfunktio on muotoa

$$f(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \qquad x \in \{0, 1\}.$$

Tallöin merkitään $X \sim B(p)$.

Lause 2.24. *Olkoon satunnaismuuttuja $X \sim B(p)$. Tällöin sille pätee seuraavat ominaisuudet.*

(i) $\mathbb{E}(X) = p$

(ii) $\sigma_X^2 = p(1-p)$

Määritelmä 2.25. Diskreetin satunnaismuuttujan X sanotaan olevan Poisson-jakautunut parametrilla λ, jos sen pistetodennäköisyysfunktio on muotoa

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \qquad \lambda > 0, x \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Tällöin merkitään $X \sim Poisson(\lambda)$.

Lause 2.26. *Olkoon satunnaismuuttujat $X_1 \sim Poisson(\lambda_1)$ ja $X_2 \sim Poisson(\lambda_2)$. Tällöin niille pätee seuraavat ominaisuudet.*

(i) $\mathbb{E}(X_1) = \lambda_1$

(ii) $\sigma_{X_1}^2 = \lambda_1$

(iii) Jos $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$*, niin* $X_1 + X_2 \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Määritelmä 2.27. Diskreetin satunnaismuuttujan X sanotaan olevan geometrisesti jakautunut parametrilla $0 \leq p \leq 1$, jos sen pistetodennäköisyysfunktio on muotoa

$$f(x) = p(1-p)^x, \qquad x \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Tällöin merkitään $X \sim Geom(p)$.

Lause 2.28. *Olkoon satunnaismuuttuja $X \sim Geom(p)$. Tällöin sille pätee seuraavat ominaisuudet.*

(i) $\mathbb{E}(X) = \frac{1-p}{p}$

(ii) $\sigma_X^2 = \frac{1-p}{p^2}$

Geometrisesti jakautuneen satunnaismuuttujan kertymäfunktio saadaan suoraviivaisesti geometrisen sarjan ominaisuuksien avulla,

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{i=0}^{x} p(1-p)^i = 1 - (1-p)^{x+1}.$$

Määritelmä 2.29. Jatkuvan satunnaismuuttujan X sanotaan olevan eksponenttijakautunut parametrilla λ, jos sen tiheysfunktio on muotoa

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad \lambda > 0,\ x > 0.$$

Tällöin merkitään $X \sim Exp(\lambda)$.

Eksponenttijakautuneen satunnaismuuttujan tiheysfunktiosta saadaan suoraviivaisesti integroimalla jakauman kertymäfunktio,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} - \frac{1}{-\lambda} \right) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Lause 2.30. *Olkoon satunnaismuuttuja $X \sim Exp(\lambda)$. Tällöin sille pätee seuraavat ominaisuudet.*

(i) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$

(ii) $\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

(iii) Jos $x, h > 0$, niin $\mathbb{P}(X > x + h \mid X > x) = \mathbb{P}(X > h)$.

Lauseen kolmatta kohtaa kutsutaan usein eksponenttijakauman muistinmenetysominaisuudeksi. Tämä tarkoittaa, että jos X on jonkin elinaika, niin jäljellä oleva elinaika ei riipu jo eletystä ajasta. Tämän ominaisuuden vuoksi eksponenttijakauma on hyvin keskeisessä asemassa satunnaisilmiöitä tarkasteltaessa.

Paksuhäntäiset jakaumat ovat hyvin keskeinen jakaumaperhe stokastisia systeemejä, kuten riskiprosesseja, kuvatessa ja mallinnettaessa. Monien yleisimpien jatkuvien jakaumien, kuten esimerkiksi normaalijakauman ja eksponenttijakauman, oikeanpuoleiset hännät ovat jonkin eksponentiaalisesti laskevan funktion rajoittamia, jolloin puhutaan kevythäntäisistä jakaumista. Paksuhäntäisiksi kutsutaan jakaumia, jotka eivät täytä tätä ehtoa.

Määritelmä 2.31. Satunnaismuuttujan X jakaumaa kutsutaan paksuhäntäiseksi, jos

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \infty,$$

kaikilla $t > 0$.

Vastaavasti kevythäntäisille jakaumille pätee $M_X(t) < \infty$ jollakin $t > 0$. Tunnetuimpia ja useimmin käytetyimpiä paksuhäntäisiä jakamia ovat Pareto-jakauma, Weibull-jakauma ja log-normaalijakauma. Nämä kaikki kuuluvat myös tärkeään paksuhäntäisten jakaumien alaluokkaan, alieksponentiaalisiin jakaumiin.

Määritelmä 2.32. Olkoon X_1 ja X_2 riippumattomia satunnaismuuttujia ketymäfunktioilla F_{X_1} ja F_{X_2}. Tällöin kertymäfunktioiden konvoluutio määritellään ehdosta

$$F_{X_1} * F_{X_2}(x) = \int_{\mathbb{R}} F_{X_1}(x-t)dF_{X_2}(t), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Tiheysfunktioiden konvoluutio määritellään myös vastaavasti.

Konvoluution avulla voidaan määrittää jakauma satunnaismuuttujalle $X_1 + X_2$ niiden omien jakaumien avulla. Tällöin esimerkiksi kertymäfunktio $F_{X_1+X_2}(x)$ saadaan kertymäfunktioiden F_{X_1} ja F_{X_2} konvoluutiona, $F_{X_1+X_2}(x) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 \leq x) = F_{X_1} * F_{X_2}(x)$.

Määritelmä 2.33. Olkoon X positiivinen satunnaismuuttuja kertymäfunktiolla F. Lisäksi merkitään $\overline{F}(x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x)$, jota kutsutaan myös häntäfunktioksi. X:n jakauma on alieksponentiaalinen, jos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F * F}(x)}{2\overline{F}(x)} = 1.$$

Tällöin merkitään $F \in \mathcal{S}$, missä $\mathcal{S}$ on alieksponentiaalisten jakaumien luokka.

Olkoon $X_1, \ldots, X_n$ riippumattomia ja samoin jakautuneita positiivisia satunnaismuuttujia kertymäfunktiolla F_X. Tällöin on yhtäpitävää määritelmän 2.33 kanssa määritellä F_X alieksponentiaaliseksi, jos kaikille $n \geq 2$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n > x)}{\mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) > x)} = 1. \tag{2.34}$$

2.4.1 Yhdistetyt jakaumat

Olkoon jonon $Z_1, Z_2, \ldots$ jäsenet ja $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ei-negatiivisia ja riippumattomia satunnaismuuttujia, sekä $Z_1, Z_2, \ldots$ samoin jakautuneita. Tällöin satunnaismuuttujaa

$$X = \begin{cases} Z_1 + \cdots + Z_N & \text{,jos } N \geq 1 \\ 0 & \text{,jos } N = 0 \end{cases} \tag{2.35}$$

kutsutaan yhdistetyksi satunnaismuuttujaksi ja sen jakaumaa yhdistetyksi jakaumaksi. Yhdistetyt jakaumat ovat tärkeässä asemassa finanssimaailman satunnaisilmiöitä mallinnettaessa, joista varsinkin yhdistetty Poisson-jakauma on keskeinen. Tämän lisäksi esitetään yhdistetty geometrinen jakauma, joka on myös hyödyllistä tuntea.

Määritelmä 2.36. Olkoon $N \sim Poisson(\lambda)$, sekä $Y_1, Y_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia kertymäfunktiolla F_Y. Olkoon lisäksi N riippumaton satunnaismuuttujista $Y_1, Y_2, \ldots$. Tällöin satunnaismuuttujalla

$$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

on yhdistetty Poisson-jakauma parametrilla (λ, F_Y). Yhdistetyn Poisson-jakautuneen muuttujan X pistetodennäköisyysfunktio on muotoa

$$f_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} (f_Y)^{n*}(x), \qquad x \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

missä $(f_Y)^{n*}$ on satunnaismuuttujien $Y_1, Y_2, \ldots$ pistetodennököisyysfunktion n-kertainen konvoluutio itsensä kanssa.

Määritelmä 2.37. Olkoon $N \sim Geom(p)$, sekä $Y_1, Y_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia kertymäfunktiolla F_Y. Olkoon lisäksi N riippumaton satunnaismuuttujista $Y_1, Y_2, \ldots$. Tällöin satunnaismuuttujalla

$$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

on yhdistetty geometrinen jakauma parametrilla (p, F_Y). Yhdistetyn geometrisesti jakautuneen muuttujan X kertymäfunktio on muotoa

$$F_X(x) = (1-p) \sum_{n=0}^{\infty} p^n F_Y^{n*}(x).$$

Luku 3

Stokastiikka

Sana stokastinen tulee Kreikan kielestä ja sen voi tulkita tarkoittavan satunnaista. Niin luonnossa kuin monella tieteenkin alalla, ilmenee todennäiköisyysteorian lakeja noudattavia ajan kuluessa muuttuvia satunnaisilmiöitä, joiden mallinnukseen ja tutkimiseen käytetään stokastisia prosesseja. Esimerkiksi bakteeripopulaation kasvuun ja finanssimarkkinoiden muutoksiin on olemassa sopivia prosesseja, joiden avulla näiden ilmiöden käyttäytymistä pyritään muun muassa ennustamaan.

3.1 Stokastinen prosessi

Määritelmä 3.1. Satunnaismuuttujien kokoelmaa $(X_t\ ;\ t \in T)$ indeksijoukolla T kutsutaan stokastiseksi prosessiksi.

Satunnaismuuttujien arvoja kutsutaan prosessin tiloiksi, jotka muodostavat tilajoukon S. Prosessin indeksijoukko kuvastaa usein aikaa, jolloin $T \subset \mathbb{R}$ ja X_t tarkoittaa kyseistä prosessia hetkellä t. Vaihtoehtoisesti voidaan myös käyttää alaindeksin sijaan merkintää $X(t) := X_t$. Stokastiset prosessit luokitellaan niiden indeksi- ja tilajoukkojen jatkuvuuden perusteella diskreeteiksi tai jatkuviksi, ja diskreetti- tai reaaliarvoisiksi prosesseiksi.

Esimerkki 3.2. Kuvitellaan liike, jossa asiointi tapahtuu yhden palvelutiskin kautta. Asiakas saapuessaan liikkeeseen siirtyy joko palveltavaksi tai jonoon, riippuen onko liikkeeseen saapunut jo aiemmin muita asiakkaita. Palvelua saatuaan asiakas poistuu liikkeestä. Tällainen yhden jonon jonotussysteemi on yksinkertainen esimerkki ilmiöstä, jota voidaan mallintaa stokastisena prosessina. Tällöin prosessi $(X(t))$ voi kuvata liikkeessä olevien asiakkaiden lukumäärää hetkellä t tilajoukkona $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Erityisesti tällainen prosessi voi siirtyä nykytilasta vain tilaan joka on yhtä suurempi, yhtä pienempi tai pysyä nykyisessä tilassa. Usein tällaisessa mallissa uuden asiakkaan saapuminen ja yksittäisen palvelun kesto oletetaan satunnaiseksi.

Stokastisita prosesseista on yleisesti sanottavissa aika niukasti. Markovin ketjut muodostavat laajan ja käytännöllisen stokastisten prosessien luokan.

Määritelmä 3.3. Stokastinen prosessi $(X(t)\ ;\ t \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ on Markovin ketju, jos se täyttää ehdon

$$\mathbb{P}(X(t+1) = j \mid X(0) = i_0, \ldots, X(t-1) = i_{t-1}, X(t) = i_t) = \mathbb{P}(X(t+1) = j \mid X(t) = i_t)$$

kaikilla ajanhetkillä $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ja tiloilla $i, j \in S$.

Määritelmän ehtoa kutsutaan Markov-ominaisuudeksi. Sen mukaan prosessin tuleva tila riippuu ainoastaan tämänhetkisestä tilasta koko historian sijaan. Markovin ketjujen tärkeimpiä ominaisuuksia ovat tilojen väliset siirtymätodennäköisyydet ja ketjun siirtymämatriisi.

Määritelmä 3.4. Olkoon $(X(t))$ stokastinen prosessi. Tilojen $i, j \in S$ välinen siirtymätodennäköisyys on

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X(t+1) = j \mid X(t) = i).$$

Lisäksi prosessin $(X(t))$ sanotaan olevan stationaarinen, mikäli

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X(t+1) = j \mid X(t) = i) = \mathbb{P}(X(u+1) = j \mid X(u) = i),$$

eli mikäli siirtymätodennäköisyydet eivät riipu ajanhetkistä, vaan pelkästään tiloista $i, j \in S$.

Määritelmä 3.5. Olkoon $(X(t))$ Markovin ketju ja p_{ij} siirtymätodnnäköisyys tilasta i tilaan j. Tällöin ketjun määrittelevä siirtymämatriisi on

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0j} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i0} & p_{i1} & \cdots & p_{ij} \end{bmatrix}.$$

Jatkon kannalta tärkeä prosessi on laskuriprosessi, $(N(t)\ ;\ t \geq 0)$, joka nimensä mukaisestikin laskee tapahtuneiden insidenssien kokonaismäärän tarkasteltavalla ajanjaksolla. Insidensseillä tarkoitetaan jotain tarkasteltavan ilmiön tapahtumaa, esimerkiksi asiakkaan saapumista liikkeeseen. Laskuriprosessilla on seuraavat ominaisuudet:

(i) $N(0) = 0$.

(ii) $N(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(iii) Jos $u \leq t$, niin $N(u) \leq N(t)$.

Oleellista laskuriprosessissa on, että seuraava mahdollinen tila on ainoastaan yhden nykyistä suurempi. Luonnollisesti ominaisuuksista seuraa, että jos $u < t$, niin tällöin $N(t) - N(u)$ kertoo aikavälillä $[u, t]$ tapahtuneiden insidenssien määrän. Erityisesti $N(t) - N(0) = N(t) - 0 = N(t)$ tarkoittaa välillä $[0, t]$ tapahtuneiden insidenssien määrää.

3.2 Poisson-prosessi

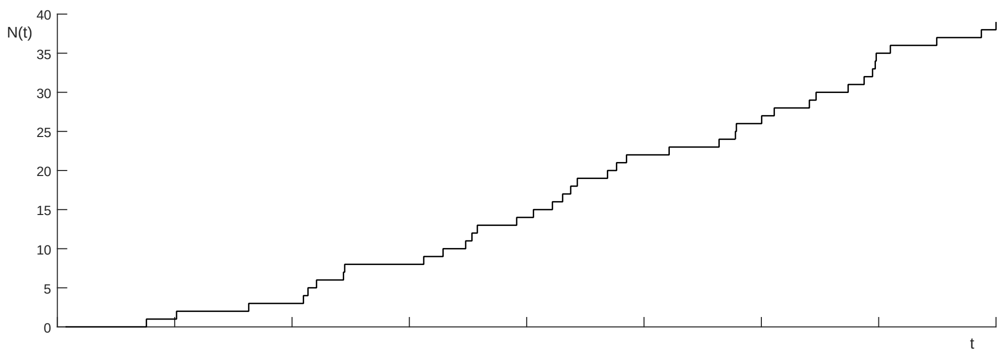
Määritelmä 3.6. Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda > 0$ on laskuriprosessi $(N(t)\ ;\ t \geq 0)$ varustettuna seuraavilla ominaisuuksilla:

(i) $N(0) = 0$.

(ii) Sen lisäykset $N(t) - N(s)$ ja $N(v) - N(u)$ ovat riippumattomia kaikille ajanhetkille $0 \leq s < t \leq u < v$.

(iii) $N(t)$ on Poisson-jakautunut satunnaismuuttuja parametrilla λt, kaikilla $t > 0$.

Poisson-prosessi riippuu vain sen parametrista, joka voi olla vakio, funktio tai Radon-mitta. Poisson-prosessin sanotaan olevan homogeeninen, jos sen parametri λ on vakio. Tällöin se on myös stationaarinen, jolloin $N(h + t) - N(h) \sim N(t)$. Vastaavasti epähomogeeniseksi sanotaan Poisson-prosessia, jonka parametrina on vakion sijaan jokin intensiteettifunktio Λ.



Kuva 3.1: Erään Poisson-prosessin kuvaaja

Lemma 3.7. *Olkoon $(N(t)\ ;\ t \geq 0)$ homogeeninen Poisson-prosessi intensiteetillä λ. Tällöin*

$$\mathbb{E}(N(t)) = \lambda t.$$

Todistus. Suoraan Poisson-prosessin määritelmän perusteella

$$N(t) \sim Poisson(\lambda t),$$

joten lauseen 2.26 ensimmäisen kohdan perusteella

$$\mathbb{E}(N(t)) = \lambda t.$$

$\square$

Stokastiset prosessit määriteltiin kokoelmana satunnaismuuttujia, joten vastaavasti yhdistetty stokastinen prosessi voidaan määritellä kokoelmana yhdistettyjä satunnaismuuttujia.

Määritelmä 3.8. Olkoon $Y_1, Y_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia kertymäfunktiolla F, sekä lisäksi $(N(t))$ satunnaismuuttujista $Y_1, Y_2, \ldots$ riippumaton Poisson-prosessi intensiteetillä λ. Määritellään yhdistetty satunnaismuuttuja

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i.$$

Tällöin prosessi $(X(t)\ ;\ t \geq 0)$ on yhdistetty Poisson-prosessi parametrilla (λ, F).

Luku 4

Vararikkoteoria

Vararikkoteoria, tai vaihtoehtoisesti riskiteoria, tarkastelee finanssilaitoksen vakavaraisuutta, haavoittuvuutta ja vararikon mahdollisuutta matemaattisia malleja hyödyntäen. Finanssilaitokset kohtaavat päivittäisessä liiketoiminnassaan usein satunnaisten ilmiöiden aheuttamia riskejä, joihin huonosti varautuminen voi aiheuttaa laitoksen vararikon ja vaikuttaa talouteen jopa maailmanlaajuisesti. Vararikkoteorian avulla pyritään arvioimaan yhtiön mahdollisia vararikkohetkiä ja niiden todennäköisyyksiä, jolloin liiketoiminnan riskeiltä pystytään suojautumaan ajoissa. Tarkastellaan jatkossa finanssimaailman toimijoista vain vakuutuslaitoksia, joille suurimpia riskejä aiheuttavat varsinkin vakuutuskorvauksiin johtavat tapahtumat.

4.1 Cramér–Lundbergin malli

Vakuutusyhtiön kokonaistulot ja -menot koostuvat usein monista erillisistä tekijöistä, mutta tarkastellaan hieman yksinkertaisempaa mallia, jota toki voi tarvittaessa laajentaa ja monipuolistaa. Cramér–Lundbergin malli on hyvin klassinen vararikkoteoreettinen malli vakuutusyhtiön vakavaraisuuden tarkasteluun, jonka ruotsalainen matemaatikko Filip Lundberg esitteli jo vuonna 1903. Mallin keskeisin tarkoitus on tutkia todennäköisyyttä, millä yhtiö kohtaa vararikon.

Oletetaan, että vakuutusyhtiön tulot koostuvat ainoastaan asiakkaiden maksamista vakuutusmaksuista ja menot vakuutuskorvauksista. Lisäksi yhtiöllä on omaa pääomaa, jota merkitään muuttujalla U. Tällöin $U(0) = u$ tarkoittaa yhtiö pääomaa hetkellä 0, eli alkupääomaa ennen tarkasteltavan periodin ja vakuutustoiminnan alkua. Yhtiön asiakkaat maksavat vakuutusmaksuja vakiotasolla c tarkasteltavan periodin kuluessa, jolloin ct on yhtiön tulot aikavälillä $[0, t]$. Korvausvaateet aiheutuvat satunnaisilmiöistä, joten niitä mallinnetaan stokastisia prosesseja hyödyntäen. Oletetaan, että korvausvaateet $Y_1, Y_2, \ldots$

saapuvat yhtiöön Poisson-prosessin $(N(t)\ ;\ t \geq 0)$ mukaisesti intensiteetillä λ. Lisäksi $Y_1, Y_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita kertymäfunktiolla F, odotusarvolla $\mu < \infty$, sekä riippumattomia saapumisprosessista $(N(t))$. Tällöin oletusten perusteella kokonaisvahinkomäärä $R(t) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{N(t)}$ on yhdistetty Poisson-prosessi parametrilla (λ, F).

Cramér–Lundbergin mallin ominaisuuksien vuoksi yhtiön pääomaa hetkellä $t \geq 0$ voidaan kuvata riskiprosessina

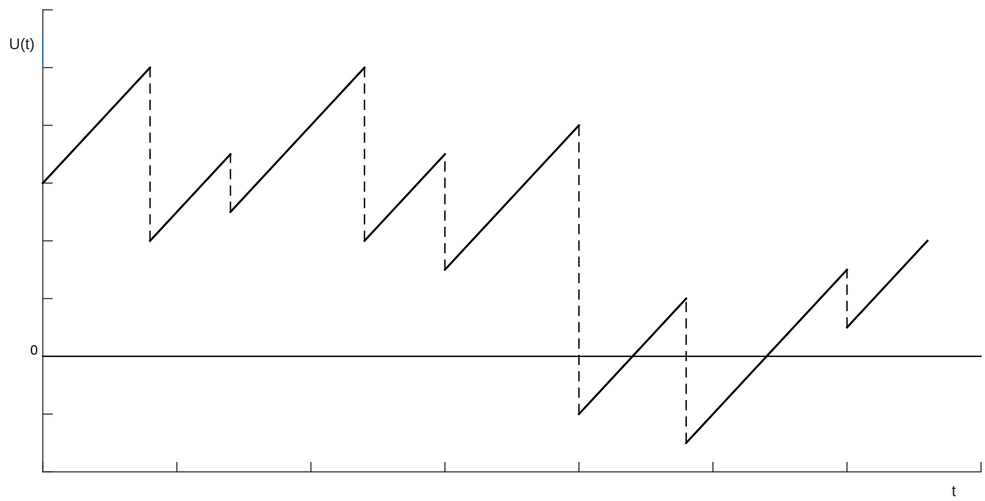
$$U(t) = u + ct - R(t). \tag{4.1}$$

Kuva 4.1 havainnollistaa riskiprosessin $U(t)$ kulkua. Vararikolla tarkoitetaan tilannetta kun yhtiön alkupääoma ja saatavat vakuutusmaksut eivät riitä kattamaan korvauksista aiheutuvia kuluja. Olkoon $\tau(u)$ yhtiön vararikkohetki alkupääomalla u, jolloin se määritellään

$$\tau(u) = \min\{t \geq 0 \mid U(t) < 0\}. \tag{4.2}$$

Tällöin yhtiön vararikkotodennäköisyys $\psi(u)$ määritellään

$$\psi(u) = \mathbb{P}(\tau(u) < \infty). \tag{4.3}$$



Kuva 4.1: Cramér–Lundbergin mallin riskiprosessin kuvaaja. Vakuutusmaksutaso c on kuvaajan kulmakerroin ja saapuneet korvausvaateet aiheuttavat prosessin pudotukset.

4.1.1 Nettotulosehto

Esitellyn mallin mukaisesti vakuutusyhtiö saa asiakkailta vakuutusmaksuja tasolla c. Tarkastellaan seuraavaksi c:n optimaalista valintaa.

Lause 4.4. *Cramér–Lundbergin mallin mukaisen riskiprosessin muodostavien satunnaismuuttujien odotusarvo on*

$$\mathbb{E}(U(t)) = u + ct + \lambda\mu t.$$

Todistus. Odotusarvon ominaisuuksien perusteella saadaan suoraviivaisesti

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U(t)) &= \mathbb{E}(u + ct + R(t)) \\ &= u + ct + \mathbb{E}(R(t)).\end{aligned}$$

Prosessi $(R(t))$ määriteltiin $R(t) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{N(t)}$, sekä lisäksi $(N(t))$ on homogeeninen Poisson-prosessi, joten

$$\begin{aligned}E(R(t)) &= \sum_{k=o}^{\infty} \mathbb{E}(R(t) \mid N(t) = k)\mathbb{P}(N(t) = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \,\middle|\, N(t) = k\right) \mathbb{P}(N(t) = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i\right) \mathbb{P}(N(t) = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k\mu\mathbb{P}(N(t) = k) \\ &= \mu\mathbb{E}(N(t)) \\ &= \lambda\mu t.\end{aligned}$$

□

Ajan kuluessa yhtiö tekee tulosta vain vakuutusmaksuilla, sillä alkupääoma pysyy samana riippumatta t:stä. Riskiprosessin odotetuksi tulokseksi periodilla $[0, t]$ saadaan $\mathbb{E}(U(t)) - u = (c - \lambda\mu)t$. Tällöin selkeä ehto vakuutusmaksujen tason valinnalle on

$$(c - \lambda\mu)t > 0, \tag{4.5}$$

eli

$$c - \lambda\mu > 0. \tag{4.6}$$

Olkoon θ vakuutusmaksun varmuuslisä, jolloin mallin nettotulosehto määritellään

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0. \tag{4.7}$$

Nyt yhtiölle maksetut vakuutusmaksut jakson $[0, t]$ aikana voidaan ilmoittaa myös muodossa

$$ct = (1 + \theta)\lambda\mu t. \tag{4.8}$$

4.1.2 Vararikkotodennäköisyydet

Vararikkoteorian eräs tavoite on määrittää yhtiön vararikkotodennäköisyys annetulla alkupääomalla u, tai vähintään löytää sille luotettava arvio suljetun ratkaisun puuttuessa. Cramér–Lundbergin mallissa satunnaisuutta on vain kokonaisvahinkomäärässä, jolloin korvausvaateiden suuruusjakauma on avainasemassa vararikkotodennäköisyyksiä tarkasteltaessa.

Aiemmin kohdassa 2.4 esiteltiin paksuhäntäisten ja kevythäntäisten jakaumien perhe. Kaikki jakaumat ovat joko päksuhäntäisiä, tai kevythäntäisiä, joten vakuutusyhtiö kohtaa korvausvaateita, jotka ovat jakautuneet jommalla kummalla tavalla. Kevythäntäiset jakaumat ovat jonkin eksponentiaalisesti laskevan funktion rajoittamia, joten suurten arvojen todennäköisyys laskee eksponentiaalisesti ja näin ollen ne ovat hyvin epätodennäköisiä. Paksuhäntäisillä jakaumilla näin ei ole, vaan tällaisen jakauman omaava satunnaismuuttuja voi saada suurenkin arvon varteenotettavalla todennäköisyydellä. Monesti niistä puhutaankin vakuutusyhtiölle vaarallisina jakaumina, sillä korvausvaateiden näin jakautuessa yhtiö voi kohdata hyvinkin suuria korvausvaateita, ja edelleen ajautua vararikkoon, huomattavasti todennäköisemmin.

Tarkastellaan aluksi yhtiön vararikkotodennäköisyyden $\psi(u)$ määrittämistä yleisesti, ilman oletuksia korvausvaateiden jakaumasta. Aiemmin vararikkotodennäköisyys määriteltiin Cramér–Lundbergin mallin sisällä

$$\psi(u) = \mathbb{P}(\tau(u) < \infty). \tag{4.9}$$

Todennäköisyydelle $1 - \psi(u)$ voidaan löytää täsmällinen esitys soveltaen Pollaczek-Khinchinen kaavaa, jonka avulla saadaan

$$1 - \psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n F_I^{n*}(u). \tag{4.10}$$

Kaavassa (4.10) F tarkoittaa korvausvaateiden $Y_1, Y_2, \ldots$ kertymäfunktiota ja F_I integroitua häntäjakaumaa, joka määritellään

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \overline{F}(z) dz. \tag{4.11}$$

Merkitään lisäksi

$$f_I(x) = \frac{\overline{F}(x)}{\mu}. \tag{4.12}$$

Integroitu hantäjakauma on erään satunnaismuuttujan kertymäfunktio, jolloin $f_I(x)$ on tiheysfunktio.

Pollaczek-Khinchinen kaava on kehitettiin jonotussysteemien tarkasteluun, jolloin se esittää yhteyden jonon pituudelle ja palveluajalle tietynlaisessa systeemissä. Cramér–Lundbergin malli on hyvin vertailukelpoinen tällaiseen jonotussysteemiin, jolloin kyseistä kaavaa voidaan soveltaa myös vararikkotodennäköisyyksien määrittämiseen. Kaavan 4.10 johtaminen sekä lisää perusteluja Pollaczek-Khinchinen kaavan soveltamiskelpoisuudelle löytyy teoksista [9] ja [11]. Esitys päättymättömänä sarjana luo haasteita kaavan (4.10) käytännöllisyydelle tarkoissa laskelmissa, mutta se on erityisen hyödyllinen $\psi(u)$:n arvioinnissa numeerisia menetelmiä hyödyntäen, sillä sen muoto kertoo yhtiön selviytymistodennäköisyyden $1 - \psi(u)$ olevan jonkin satunnaismuuttujan kertymäfunktio, jolla on yhdistetty geometrinen jakauma.

Kaavan (4.10) täsmällinen ratkaiseminen on usein haastavaa tai jopa mahdotonta, riippuen jakaumatyypistä F. Toisaalta taas esimerkiksi eksponenttijakautuneille korvausvaateille kaava (4.10) pelkistyy hyvinkin yksinkertaiseen muotoon. Tästä tapauksesta lisää muun muassa teoksissa [7], [11] ja [12]. Täsmällisen ratkaisun puuttuessa on käytettävä estimointimenetelmiä ja etsittävä paras mahdollinen arvio $\psi(u)$:lle. Vararikkotodennäköisyyden luonteen vuoksi erityisen kiinnostavaa on etsiä tälle luotettava yläraja.

Lause 4.13. *Olkoon $(U(t))$ Cramér–Lundbergin mallin mukainen riskiprosessi sekä $M_Y(t)$ korvausvaateiden momentit generoiva funktio. Olkoon lisäksi olemassa Lundbergin eksponentti R, joka on yhtälön*

$$M_Y(t) - 1 = \frac{ct}{\lambda}$$

positiivinen ratkaisu. Tällöin pätee

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}.$$

Todistus. Vastaava tulos todistetaan esimerkiksi teoksissa [7] ja [12], mutta nyt se sivuutetaan epäoleellisena. □

Tulos 4.13 on käyttökelpoinen vain kevythäntäisten jakaumien kohdalla, sillä se edellyttää ääreellistä momentit generoivaa funktiota.

Rajoitutaan jatkossa tarkastelemaan vain alieksponentiaalisten jakaumien luokkaa, jotka vaarallisen paksuhäntäisen luonteensa vuoksi muodostavat mielenkiintoisen ja tärkeän jakaumien erityisryhmän. Näin jakautuneiden korvausvaateiden erityispiirteenä oli se, että tällöin yhtiön vararikkoon ajautumiseen aiheuttaa yksittäinen suuri korvausvaade usean pienemmän sijaan. Tällöin siis tuloksessa 4.13 vaadittavaa Lundbergin eksponenttia R ei ole olemassa, joten vararikkotodennäköisyyden arviointiin on käytettävä muita menetelmiä.

Vararikkotodennäköisyyksille voidaan löytää asymptoottisia arvioita, mutta ne eivät ole tämän tutkielman keskeisintä aihepiiriä. Esitetään kuitenkin eräs keskeinen tulos Cramér–Lundbergin mallille.

Lause 4.14. *Tarkastellaan Cramér–Lundbergin mallia nettotulosehdolla $\theta > 0$ ja $F_I \in \mathcal{S}$. Tällöin*

$$\psi(u) \sim \frac{\overline{F_I}(u)}{\theta},$$

kun $u \to \infty$.

Todistus. Tuloksen todistus löytyy esimerkiksi teoksista [7] ja [9]. $\square$

Luku 5

Estimointi

Estimoinnilla tarkoitetaan menetelmiä, joilla yritetään löytää käyttökelpoista estimaattia, eli arviota, kun jonkin parametrin täsmällinen määrittäminen on syystä tai toisesta mahdotonta. Tällaisia menetelmiä käytetään usein tilastotieteissä jonkin tuntemattoman parametrin arvon määrittämiseksi saatavilla olevan aineiston perusteella. Matemaattisissa ongelmissa usein taas monimutkaiset kaavat pakottavat etsimään riittäviä ylä- tai alarajoja tarkasteltaville suureille. Toinen mahdollinen keino on etsiä yksinkertaisempia funktioita, jotka käyttäytyvät riittävän samankaltaisesti tarkasteltavan funktion kanssa. Estimoitaessa kehitetään sääntö tai funktio, jolla muodostetaan arvio tarkasteltavasta parametrista käytetyn aineiston pohjalta. Tätä sääntöä kutsutaan estimaattoriksi.

Estimaattorin hyvyyttä arvioidaan tutkimalla kuinka tarkasti sen jakauma keskittyy tuntemattoman parametrin läheisyyteen. Eräitä perinteisiiä kriteereitä ovat harhattomuus, tarkentuvuus ja tehokkuus.

Määritelmä 5.1. Olkoon tuntematon parametri θ ja sen estimaattori T. Lisäksi olkoon T_n otoskokoon n perustuva estimaattori.

(i) Estimaattori T on harhaton, mikäli $\mathbb{E}(T) = \theta$. Lisäksi estimaattori T_n on asymptoottisesti harhaton, mikäli otoskoon n kasvaessa harha lähestyy nollaa, eli

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(T_n) = \theta.$$

(ii) Estimaattori T on tarkentuva, mikäli se suppenee stokastisesti kohti estimoitavan parametrin todellista arvoa θ, eli

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|T_n - \theta| > \varepsilon) = 0,$$

kaikilla $\varepsilon > 0$. Tällöin merkitään $T_n \xrightarrow{P} \theta$

(iii) Olkoon T' myös parametrin θ estimaattori. Tällöin estimaattorin T sanotaan olevan tehokkaampi kuin T', jos

$$\mathbb{E}((T-\theta)^2) \leq \mathbb{E}((T'-\theta)^2).$$

Harhattoman estimaattorin tapauksessa $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(T') = \theta$, jolloin määritelmän 5.1 kohta (iii) voidaan muotoilla

$$\sigma_T^2 \leq \sigma_{T'}^2. \tag{5.2}$$

Luottamusjoukoilla mitataan käytettävän mallin, estimointimenetelmän ja sitä kautta myös muodostetun estimaatin luotettavuutta. Usein, kuten myös nyt käsiteltävää vararikko-ongelmaa tarkastellessa, puhutaan luottamusväleistä estimoitavan parametrin yksiulotteisuuden vuoksi. Aineistosta riippuva parametriavaruuden osajoukko on luottamusjoukko luottamustasolla $1-\alpha$, jos satunnainen parametriavaruuden joukko peittää vähintään todennäköisyydellä $1-\alpha$ todellisen parametriarvon θ, joka on kiinteä ei satunnainen piste parametriavaruudessa. Käytetään yleisesti käytettyä luottamusväliä luottamustasolla $0,95$, jolloin se muodostetaan

$$\hat{x} \pm 1,96\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}, \tag{5.3}$$

missä $\hat{x}$ on muodostettu estimaatti, σ_x käytetyn estimaattorin hajonta ja n otoksen suuruus.

Estimoinnissa käytetty aineisto koostuu usein ajan mittaan kerätystä historiallisesta datasta, mutta aina tarpeeksi kattavaa, tai muuten mielekästä, aineistoa ei ole saatavilla. Tällöin vaihtoehtona on käytettävän aineiston luominen esimerkiksi simuloimalla. Eräs simulointimenetelmä on tuottaa tietokoneella havaintoja tarkasteltavan ilmiön jakaumaa noudattavasta satunnaismuuttujasta, joiden perusteella muodostetaan estimaatti sopivaa estimaattoria käyttäen. Tämän menetelmän haasteena on tarkasteltavaan ilmiöön sopivan jakauman löytäminen, sekä mahdollisesti luotettavaan estimaattiin tarvittava tuotettavien havaintojen suuri määrä. Lisäksi monet todellisuutta kuvaavat mallit voivat olla niin monimutkaisia, jolloin simuloinnissa on pakkoa rajoittua vain osailmiöihin.

Osion 4.1.2 päätteksi todettiin etteivät siinä esitetyt keinot ole käytettävissä yhtiön vararikkotodennäköisyyden arviointiin, kun $F \in \mathcal{S}$ eli korvausvaateet ovat alieksponentiaalisesti jakautuneet. Tarkastellaan nyt simuloinnin hyödyntämistä tämän vararikko-ongelman ratkaisussa. Pyritään tuottamaan simuloimalla havaintoja $Z_1, Z_2, \ldots$, jotka ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita jonkin satunnaismuuttujan Z kanssa, jonka avulla vararikkotodennäköisyyden voisi esittää muodossa $\psi(u) = \mathbb{E}(Z)$. Tällöin estimaattorina on suoraviivaista käyttää havintojen keskiarvoa $\overline{z}$, sillä se täyttää harhattomuuden kriteerin

$$\mathbb{E}(\overline{z}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(Z_i) = \frac{1}{n}\, n\, \mathbb{E}(Z) = \psi(u). \tag{5.4}$$

Luottamusvälien muodostamiseen käytetään havainnon Z_i otosvarianssia

$$s^2 = \frac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{z})^2, \tag{5.5}$$

sillä se on harhaton varianssin estimaattori. Tällöin muodostetulle estimaatille saadaan 95%:n luottamusväli

$$\overline{z} \pm 1,96\frac{s}{\sqrt{n}}. \tag{5.6}$$

Simulointimenetelmiä on monenlaisia, joten on luonnollista vaatia käytetyltä menetelmältä tarkkuutta ja tehokkuutta, jolloin menetelmää käyttäen saadut tulokset olisivat käyttökelpoisia. Tähän liittyviä keskeisiä käsitteitä ovat absoluuttinen ja suhteellinen virhe. Vakuutusyhtiön vararikkotodennäköisyydet laskevat alkupääoman kasvaessa, jolloin puhutaan harvinaisten tapahtumien simuloinnista. Tällöin suhteellinen virhe $\frac{\sigma_Z}{\psi(u)}$, on käyttökelpoinen tapa mitata menetelmän tehokkuutta. Esimerkiksi tunnetussa ja suoraviivaisessa karkeassa Monte Carlo -menetelmässä määritellään tuotettava satunnaismuuttuja Z vararikon indikaattoriksi

$$Z = \mathbb{1}(\tau(u) < \infty), \tag{5.7}$$

jolloin havainnot ovat Bernoulli-jakautuneet ja siten $\sigma_Z^2 = \psi(u)(1-\psi(u))$. Selkeästi $\sigma_Z^2 \to 0$, kun $\psi(u) \to 0$, jolloin menetelmän absoluuttinen virhe pienenee vararikkotodennäköisyyden pienetessä. Kuitenkin suhteellinen virhe vastaavasti kasvaa, sillä

$$\frac{\sigma_Z}{\psi(u)} = \frac{\sqrt{\psi(u)(1-\psi(u))}}{\psi(u)} = \sqrt{\frac{1-\psi(u)}{\psi(u)}} \to \infty,$$

kun $\psi(u) \to 0$, joten menetelmä voi olla tehoton, vaikka absoluuttinen virhe olisikin pieni. Toinen keino havainnollistaa tätä ongelmaa on tutkia halutun tarkuuden saavuttamiseksi tarvittavan otoskoon n suuruutta. Tämä tarkastelu on oleellista, sillä usein simulointimenetelmän hyvyyttä ja tehokkuutta mitataankin simulointikierrosten ja vaaditun otoskoon suurudella. Tällöin menetelmän sanotaan olevan tehokas, mikäli tarkuudeltaan halutun estimaatin tuottaminen vaatii vain vähän laskentatehoa ja simulointikierroksia. Esimerkiksi karkeassa Monte Carlo -menetelmässä halutun suhteellisen tarkkuuden ollessa 10%, päädytään yhtälöön

$$\frac{1,96\sigma_Z}{\psi(u)\sqrt{n}} = 0,1, \tag{5.8}$$

eli

$$n = \left(\frac{10 \cdot 1,96\sigma_Z}{\psi(u)} \right)^2 = \frac{100 \cdot 1,96^2 \psi(u)(1-\psi(u))}{\psi(u)^2} \sim \frac{100 \cdot 1,96^2}{\psi(u)}. \tag{5.9}$$

Vaadittava otoskoko siis kasvaa, mikäli estimoitava todennäköisyys on pieni. Harvinaisten tapahtumien estimoinnissa tilanne on juuri tämä, sillä $\psi(u) \to 0$ kun $u \to \infty$. Toisin sanoen, jotta vaadittu otoskoko n ei kasvaisi liian suureksi, tulee estimaattorin suhteellisen virheen olla rajoitettu.

Rajoitetun suhteellisen virheen on havaittu todellisissa harvinaisten tapahtumien asetelmissa parhaimmaksi tehokkuuden arviointimenetelmäksi, kun $u \to \infty$. Tarkasteltavan tilanteen estimaattorille $\bar{z}$ sitä merkitään

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{\sigma_Z}{\psi(u)} < \infty. \tag{5.10}$$

Tällöin siis estimaattorin varianssi pienee samaa tahtia kuin $\psi(u)^2$, jolloin suhteellinen virhe pysyy rajoitettuna ja sitä kautta myös vaadittu otoskoko. Tätä hieman heikompi tehokkuuden käsite on logaritminen (tai asymptoottinen) tehokkuus. Käytännöllisesti katsottuna näiden ero on vähäinen, mutta joissain tapauksissa rajoitetun suhteellisen virheen estimattoria ei ole olemassa tai yksinkertaisesti löydettävissä, kun taas logaritmisesti tehokas on. Lisäksi logaritminen tehokkuus on usein yksinkertaisempi todeta, joten on perusteltua vaatia estimaattorilta mielummin sitä kuin rajoitettua suhteellista virhettä. Estimaattori on logaritmisesti tehokas kun

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{\sigma_Z^2}{\psi(u)^{2-\varepsilon}} = 0 \tag{5.11}$$

kaikille $\varepsilon > 0$. Tällöin siis vaaditaan, että varianssi σ_Z^2 pienenee hiukan hitaammin kuin $\psi(u)^2$, jolloin se on vaatimuksena rajoitettua suhteellista virhettä heikompi. Seuraava tulos antaa käytännöllisemmän, mutta ehdon (5.11) kanssa yhtäpitävän muodon logaritmiselle tehokkuudelle.

Lause 5.12. *Estimaattori on logaritmisesti tehokas, mikäli*

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\ln \sigma_Z}{\ln \psi(u)} \geq 1.$$

pätee. Tällöin siis tulos on yhtäpitävää ehdon (5.11) *kanssa.*

Todistus. Olkoon ε ja δ mielivaltaisia positiivisia reaalilukuja. Osoitetaan yhtäpitävyys ehdon (5.11) ja tuloksen 5.12 välillä todistamalla molemminpuoliset seuraukset. Oletetaan, että ehto (5.11) pätee. Tällöin

$$\frac{\sigma_Z^2}{\psi(u)^{2-\varepsilon}} \leq \delta,$$

kun u on riittävän suuri. Joten siis

$$\sigma_Z^2 \le \delta \psi(u)^{2-\varepsilon}.$$

Koska $0 < \psi(u) < 1$, jolloin $\ln \psi(u) < 0$, niin ottamalla logaritmit puolittain ja jakamalla $\ln \psi(u)$:lla, saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{\ln \sigma_Z}{\ln \psi(u)} &\ge \frac{\ln \delta + \ln \psi(u)^{2-\varepsilon}}{2 \ln \psi(u)} \\
&= \frac{\ln \delta}{2 \ln \psi(u)} + \frac{(2-\varepsilon) \ln \psi(u)}{2 \ln \psi(u)} \\
&= \frac{\ln \delta}{2 \ln \psi(u)} + \frac{2-\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Alkupääoman u kasvaessa $\psi(u) \to 0$, jolloin

$$\frac{\ln \delta}{2 \ln \psi(u)} + \frac{2-\varepsilon}{2} \to \frac{2-\varepsilon}{2}.$$

Koska ε valittiin mielivaltaiseksi, saadaan haluttu tulos

$$\liminf_{u \to \infty} \frac{\ln \sigma_Z}{\ln \psi(u)} \ge 1.$$

Oletetaan nyt, että tuloksen 5.12 ehto pätee. Tällöin u:n ollessa riittävän suuri

$$\frac{\ln \sigma_Z}{\ln \psi(u)} \ge 1 - \delta.$$

Kertomalla puolittain $\psi(u)$:lla saadaan

$$\sigma_Z \le \psi(u)^{1-\delta},$$

ja edelleen

$$\left(\frac{\sigma_Z}{\psi(u)^{1-\delta}} \right)^2 = \frac{\sigma_Z^2}{\psi(u)^{2-2\delta}} \le 1.$$

Tällöin myös

$$\limsup_{u \to \infty} \frac{\sigma_Z^2}{\psi(u)^{2-2\delta}} \le 1$$

pätee. Koska δ on mielivaltainen saadaan

$$\limsup_{u \to \infty} \frac{\sigma_Z^2}{\psi(u)^{2-3\delta}} = \limsup_{u \to \infty} \psi(u)^{\delta} \frac{\sigma_Z^2}{\psi(u)^{2-2\delta}} = 0,$$

sillä $\psi(u) \to 0$, kun $u \to \infty$. Valitsemalla $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ päästään haluttuun tulokseen

$$\limsup_{u \to \infty} \frac{\sigma_Z^2}{\psi(u)^{2-\varepsilon}} = 0.$$

$\square$

Tavoitteena on siis muodostaa algoritmi, eli yksityiskohtainen kuvaus estimointiprosessista, jota noudattaen tuotettu estimaattori olisi logaritmisesti tehokas tuloksen 5.12 mielessä ja jolloin vararikkotodennäköisyydelle saataisiin arvio $\psi(u) = \mathbb{E}(Z)$.

Luku 6

Algoritmi

Aiemmin kohdassa 4.1.2 muodostettiin yhtiön selviytymistodennäköisyydelle $1 - \psi(u)$ esitys yhtälön (4.10) avulla, jonka perusteella tämän todennäköisyyden todettiin olevan yhdistetyn geometrisesti jakautuneen satunnaismuuttujan kertymäfunktio. Saadaan siis

$$\psi(u) = \mathbb{P}(S_K > u), \tag{6.1}$$

missä $S_K = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_K$ on yhdistetty geometrisesti jakautunut satunnaismuuttuja. Tällöin $K \sim Geom(\frac{\lambda\mu}{c})$ ja $Y_1, Y_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita positiivisia satunnaismuuttujia kertymäfunktiolla F_I, sekä tiheysfunktiolla f_I, jotka ovat johdettavissa korvausvaateiden jakaumasta F.

Suoraviivainen menetelmä vararikkotodennäköisyyden arviointiin olisi jo aiemmin mainittu karkea Monte Carlo -menetelmä, missä satunnaismuuttuja Z määritetään vararikon indikaattoriksi ja vararikkotodennäköisyyttä arvioidaan Z:n odotusarvolla. Näin menettelemällä estimaattorista $\overline{z}$ saadaan harhaton, kuten aiemmin todettiin. Algoritmi tälle menetelmälle on seuraava:

1. Tuotetaan yhdistetyn geometrisesti jakautuneen satunnaismuuttujan lukumäärämuuttujalle $K_i \sim Geom(\frac{\lambda\mu}{c})$ arvo.
2. Tuotetaan satunnaismuuttujille $Y_1^i, \ldots, Y_{K_i}^i$ arvot tiheysfunktiota f_I käyttäen ja muodostetaan $S_{K_i} = Y_1^i + \cdots + Y_{K_i}^i$.
3. Muodostetaan havainto $Z_i = \mathbb{1}(S_K > u)$.
4. Toistetaan vaiheet 1-3 n kertaa.
5. Muodostetaan estimaatti $\psi(u) = \mathbb{E}(Z)$ estimaattoria $\overline{z} = \frac{1}{n}(Z_1 + \cdots + Z_n)$ käyttäen.

Estimointimenetelmän tehokkuus riippuu satunnaismuuttujan Z varianssista ja sen käyttäytymisestä alkupääoman kasvaessa, mutta kuten kappaleessa 5 todettiin, edellä mainitun menetelmän suhteellinen virhe kasvaa kun $u \to \infty$, eikä se näin ollen ole tehokas harvinaisten tapahtumien estimoinnissa. Optimaalisella Z:n valinnalla estimaattorin tehokkuutta voidaan kuitenkin parantaa.

Alieksponentiaalisesti jakautuneilla korvausvaateilla on jo aiemminkin mainittu määritelmän 2.33 osoittama ominaisuus, jonka mukaan yhtiön alkupääoman kasvaessa vararikon aiheuttaa vain suurin korvausvaade. Esitetään seuraavaksi aputulokset 6.2 ja 6.3, joiden avulla Z voitaisiin määrätä optimaalisesti alieksponentiaalisten korvausvaateiden erityisominaisuus huomioiden.

Lemma 6.2. *Olkoon $Y_1, \dots, Y_n$ riippumattomia ja samoinjakautuneita ei-negatiivisia satunnaismuuttujia kertymäfunktiolla F_I ja tiheysfunktiolla f_I. Merkitään järjestystunnuslukuja merkinnällä $Y_{(1)} < \cdots < Y_{(n)}$, jolloin $Y_{(1)}$ tarkoittaa satunnaismuuttujien $Y_1, \dots, Y_n$ pienintä realisaatiota ja olkoon $f_{Y_{(k)}}$ kyseisen järjestystunnusluvun tiheysfunktio. Lisäksi olkoon $\mathcal{F}_{(n-1)} = \sigma(Y_{(1)}, \dots, Y_{(n-1)})$. Tällöin*

$$\mathbb{P}(Y_{(n)} > x \mid \mathcal{F}_{(n-1)}) = \frac{\overline{F_I}(\max(Y_{(n-1)}, x))}{\overline{F_I}(Y_{(n-1)})}.$$

Sigma-algebran $\mathcal{F}_n$ voidaan tässä yhteydessä ajatella tarkoittavan informaatiota, jolloin todennäköisyys $\mathbb{P}(Y_{(n)} > x \mid \mathcal{F}_{(n-1)})$ tarkoittaa todennäköisyyttä, että satunnaismuuttujien $Y_1, \dots, Y_n$ suurin toteutunut arvo $Y_{(n)}$ on suurempi kuin x, kun kaikki pienemmät toteutuneet arvot $Y_{(1)}, \dots, Y_{(n-1)}$ tiedetään.

Todistus. Olkoon $Y_1, \dots, Y_n$ riippumattomia ja samoinjakautuneita jatkuvia satunnaismuuttujia kertymäfunktiolla F_I, sekä tiheysfunktiolla f_I. Olkoon lisäksi $f_{Y_{(k)}}$ kyseisen järjestystunnusluvun tiheysfunktio. Tällöin järjestystunnusluvut muodostavat Markovin ketjun, jolloin nille pätee Markov-ominaisuus

$$\mathbb{P}(Y_{(n)} > x \mid \mathcal{F}_{(n-1)}) = \mathbb{P}(Y_{(n)} > x \mid Y_{(n-1)}, \dots, Y_{(1)}) = \mathbb{P}(Y_{(n)} > x \mid Y_{(n-1)}).$$

Lisäksi järjestystunnuslukujen määritelmän perusteella

$$\mathbb{P}(Y_{(n)} > x \mid Y_{(n-1)} = y) = 1 = \frac{\overline{F_I}(Y_{(n-1)})}{\overline{F_I}(Y_{(n-1)})},$$

kun $x < y$. Toisaalta kun $x \geq y$ ehdollisen todennäköisyyden ominaisuuksista saadaan esitys

$$\mathbb{P}(Y_{(n)} > x \mid Y_{(n-1)} = y) = \int_x^\infty f_{Y_{(n)}|Y_{(n-1)}}(t \mid y)dt.$$

Olkoon $X_1, \dots, X_n$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaimuuttujia kertymäfunktiolla F. Tällöin esimerkiksi teoksessa [15] järjestystunnusluvun $X_{(j)}$ ehdolliselle tiheysjakaumalle, kun $X_{(i)} = t$, on määritetty muoto

$$f_{X_{(j)}|X_{(i)}}(x \mid t) = \frac{(n-i)!}{(j-i-1)!(n-j)!} \left(\frac{F(x) - F(t)}{\overline{F}(t)} \right)^{j-i-1} \left(\frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(t)} \right)^{n-j} \frac{f(x)}{\overline{F}(t)},$$

missä f on Xn tiheysfunktio, kun $1 \leq i < j \leq n$ ja $x \geq t$. Tämän perusteella saadaan

$$\int_x^\infty f_{Y_{(n)}|Y_{(n-1)}}(t \mid y) dt = \int_x^\infty \frac{f_I(t)}{\overline{F_I}(y)} dt = \frac{\overline{F_I}(x)}{\overline{F_I}(y)} = \frac{\overline{F_I}(x)}{\overline{F_I}(Y_{(n-1)})}.$$

Yhdistämällä tapaukset $x < y$ ja $x \geq y$ saadaan väite

$$\mathbb{P}(Y_{(n)} > x \mid \mathcal{F}_{(n-1)}) = \frac{\overline{F_I}(\max(Y_{(n-1)}, x))}{\overline{F_I}(Y_{(n-1)})}.$$

$\square$

Lemma 6.3. *Olkoon* $S_n = (Y_1 + \cdots + Y_n)$ *ja* $S_{(k)} = \big(Y_{(1)} + \cdots + Y_{(k)} \mathbb{1}(1 \leq k \leq n)\big)$. *Tällöin*

$$\mathbb{P}(S_n > u) = \mathbb{E}\left(\frac{\overline{F_I}(\max(u - S_{(n-1)}, Y_{(n-1)}))}{\overline{F_I}(Y_{(n-1)})} \right).$$

Todistus. Ehdollistamalla ja soveltamalla lemmaa 6.2 saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n > u) &= \mathbb{E}(\mathbb{P}(S_n > u \mid \mathcal{F}_{(n-1)})) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{P}(Y_{(n)} + S_{(n-1)} > u \mid \mathcal{F}_{(n-1)})) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{P}(Y_{(n)} > u - S_{(n-1)} \mid \mathcal{F}_{(n-1)})) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{\overline{F_I}(\max(u - S_{(n-1)}, Y_{(n-1)}))}{\overline{F_I}(Y_{(n-1)})} \right).
\end{aligned}$$

$\square$

Vararikkotodennäköisyys voitiin esittää muodossa $\psi(u) = \mathbb{P}(S_K > u)$ yhdistetyn geometrisesti jakautuneen satunnaismuuttujan S_K avulla, jolloin kun Z valitaan lemman 6.2 mukaisesti todennäköisyydeksi, että suurin korvausvaade aiheuttaa vararikon, niin lemman 6.3 perusteella $\psi(u)$:lle saadaan esitys odotusarvona $\mathbb{E}(Z)$, kuten kappaleessa 5 haluttiin. Vararikkotodennäköisyyden estimointimenetelmänä voisi tällöin käyttää seuraavaa algoritmia:

1. Tuotetaan satunnaismuuttujalle $K_i \sim Geom(\frac{\lambda\mu}{c})$ arvo.
2. Tuotetaan satunnaismuuttujat $Y_1^i, \ldots, Y_{K_i}^i$ tiheysfunktiota f_I hyödyntäen, sekä asetetaan $X_i = u - S_{(K_i-1)} = u - Y_{(1)}^i - \cdots - Y_{(K_i-1)}^i$ ja $m_i = Y_{(K_i-1)}^i$.
3. Muodostetaan
$$Z_i = \frac{\overline{F_I} \max(X_i, m_i)}{\overline{F_I}(m_i)}.$$
4. Toistetaan vaiheet 1-3 n kertaa.
5. Muodostetaan estimaatti $\psi(u) = \mathbb{E}(Z)$ estimaattoria $\overline{z} = \frac{1}{n}(Z_1 + \cdots + Z_n)$ käyttäen.

Kutsutaan edellistä menetelmää Algoritmi I:ksi. Algoritmi I tuottaa vararikkotodennäköisyydelle harhattoman estimaatin, kuten aiemmin kappaleessa 5 osoitettiin. Ennen sen avulla tuotetun estimaattorin tehokkuuden tarkastelua määritellään säännöllisesti vaihtelevat funktiot.

Määritelmä 6.4. Funktio $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ on säännöllisesti vaihteleva indeksillä $\alpha \in \mathbb{R}$, jos
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = c^\alpha,$$
kaikilla $c > 0$. Tällöin merkitään $f \in \mathcal{R}_\alpha$. Lisäksi funktion f sanotaan olevan hitaasti vaihteleva, mikäli $\alpha = 0$.

Määritelmästä seuraa, että f on säännöllisesti vaihteleva indeksillä $\alpha \in \mathbb{R}$, jos ja vain jos

$$f(x) = x^\alpha L(x), \tag{6.5}$$

kun $L(x)$ hitaasti vaihteleva ja $x > 0$. Säännöllisesti vaihtelevat funktiot ovat alieksponentiaalisten funktioiden alaluokka, joten jos $f \in \mathcal{R}_\alpha$, niin $f \in \mathcal{S}$. Lisäksi jos kertymäfunktio F on säännöllisesti vaihteleva, on tällöin myös sen integroitu häntäjakauma F_I säännöllisesti vaihteleva. Näiden seurausten todistus, sekä alieksponentiaalisten ja säännöllisesti vaihtelevien funktioiden välisestä suhteesta lisää esimerkiksi teoksessa [7]. Seuraava tulos käsittelee Algoritmi I:n tehokkuutta ja on tutkielman keskeisin tulos.

Lause 6.6. *Olkoon $\overline{F_I}(x) = \frac{L(x)}{x^\alpha}$ indeksillä $\alpha > 1$ ja $L(x) \in \mathcal{R}_0$. Tällöin Algoritmilla I tuotettu estimaattori on logaritmisesti tehokas, eli sille pätee*
$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\ln \sigma_Z}{\ln \psi(u)} \geq 1.$$

Esitetään ensin tuloksen 6.6 todistamiseksi tarvittavat seuraavat aputulokset.

Lemma 6.7. *Algoritmille I pätee*

$$\sigma_Z^2 \leq \mathbb{E}\left(K^2\left(\frac{1}{2}\overline{F_I}^2\left(\frac{u}{2}\right) + \overline{F_I}^2\left(\frac{u}{K}\right)\left|\ln \overline{F_I}\left(\frac{u}{2}\right)\right|\right)\right).$$

Todistus. Johdetaan aluksi satunnaismuuttujan $Y_{(K-1)}$ tiheysfunktio $f_{Y_{(K-1)}}(x)$, kun K on annettuna. $Y_{(K-1)}$:n kertymäfunktioksi saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_{(K-1)} \leq x) &= K\mathbb{P}(Y_1 \leq x, \ldots, Y_{K-1} \leq x, Y_K > x) + \mathbb{P}(Y_1 \leq x, \ldots, Y_K \leq x) \\
&= K\mathbb{P}(Y_1 \leq x) \cdots \mathbb{P}(Y_{K-1} \leq x)\mathbb{P}(Y_K > x) + \mathbb{P}(Y_1 \leq x) \cdots \mathbb{P}(Y_K \leq x) \\
&= KF_I(x)^{K-1}\overline{F_I}(x) + F_I(x)^K.
\end{aligned}$$

Haluttu tiheysfunktio saadaan suoraviivaisesti kertymäfunktiota derivoimalla

$$\begin{aligned}
f_{Y_{(K-1)}}(x) &= K(K-1)F_I(x)^{K-2}\overline{F_I}(x)f_I(x) - KF_I(x)^{K-1}f_I(x) + KF_I(x)^{K-1}f_I(x) \\
&= K(K-1)F_I(x)^{K-2}\overline{F_I}(x)f_I(x).
\end{aligned}$$

Satunnaismuuttujan Z varianssille pätee

$$\sigma_Z^2 = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2 \leq \mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z^2 \mid K)),$$

kun $\mathbb{E}(Z) \geq 0$. Z:n valinnan perusteella $Z \geq 0$, jolloin $\mathbb{E}(Z) \geq 0$ pätee. Määritetään seuraavaksi $\mathbb{E}(Z^2 \mid K)$. Suoraviivaisesti Z:n valinnasta lemman 6.2 perusteella saadaan

$$\mathbb{E}(Z^2 \mid K) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{\overline{F_I}(\max(u - S_{(K-1)}, Y_{(K-1)}))}{\overline{F_I}(Y_{(K-1)})}\right)^2 \middle| K\right).$$

Jos $Y_{(K-1)} \leq \frac{u}{K}$, niin

$$u - S_{(K-1)} \geq u - (K-1)\frac{u}{K} = \frac{u}{K} \geq Y_{(K-1)},$$

jolloin $\max(u - S_{(K-1)}, Y_{(K-1)}) = u - S_{(K-1)}$. Lisäksi jos $Y_{(K-1)} > \frac{u}{2}$, niin

$$u - S_{(K-1)} < u - Y_{(K-1)} < u - \frac{u}{2} = \frac{u}{2} < Y_{(K-1)},$$

joten $\max(u - S_{(K-1)}, Y_{(K-1)}) = Y_{(K-1)}$. Näiden avulla odotusarvo $\mathbb{E}(Z^2 \mid K)$ voidaan jakaa osiin riippuen $Y_{(K-1)}$:n arvosta. Saadaan summa

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z^2 \mid K) &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{\overline{F_I}(u - S_{(K-1)})}{\overline{F_I}(Y_{(K-1)})}\right)^2 \mathbb{1}\left(Y_{(K-1)} \leq \frac{u}{K}\right) \middle| K\right) \\
&+ \mathbb{E}\left(\left(\frac{\overline{F_I}(\max(u - S_{(K-1)}, Y_{(K-1)}))}{\overline{F_I}(Y_{(K-1)})}\right)^2 \mathbb{1}\left(\frac{u}{K} < Y_{(K-1)} \leq \frac{u}{2}\right) \middle| K\right) \\
&+ \mathbb{E}\left(\mathbb{1}\left(Y_{(K-1)} > \frac{u}{2}\right) \middle| K\right). \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

Summan (6.8) ensimmäiselle termille voidaan loytää yläraja seuraavasti. Jos $Y_{(K-1)} \leq \frac{u}{K}$, niin $u - S_{(K-1)} \geq \frac{u}{K}$, jolloin $\overline{F_I}(u - S_{(K-1)}) \leq \overline{F_I}\left(\frac{u}{K}\right)$, sillä kyseessä on häntäfunktio. Saadaan

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left(\frac{\overline{F_I}(u - S_{(K-1)})}{\overline{F_I}(Y_{(K-1)})}\right)^2 \mathbb{1}\left(Y_{(K-1)} \leq \frac{u}{K}\right) \middle| K\right) \\
&\leq \overline{F_I}\left(\frac{u}{K}\right)^2 \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{\overline{F_I}(Y_{(K-1)})}\right)^2 \mathbb{1}\left(Y_{(K-1)} \leq \frac{u}{K}\right) \middle| K\right) \\
&\leq \overline{F_I}\left(\frac{u}{K}\right)^2 \int_0^{\frac{u}{K}} \frac{f_{Y_{(K-1)}}(x)}{\overline{F_I}(x)^2} dx \\
&= \overline{F_I}\left(\frac{u}{K}\right)^2 \int_0^{\frac{u}{K}} \frac{K(K-1)F_I(x)^{K-2}\overline{F_I}(x) f_I(x)}{\overline{F_I}(x)^2} dx \\
&\leq K(K-1)\overline{F_I}\left(\frac{u}{K}\right)^2 \int_0^{\frac{u}{K}} \frac{f_I(x)}{\overline{F_I}(x)} dx \\
&= -K(K-1)\overline{F_I}\left(\frac{u}{K}\right)^2 \left(\ln\left(\overline{F_I}\left(\frac{u}{K}\right)\right) - \ln(\overline{F_I}(0))\right) \\
&= -K(K-1)\overline{F_I}\left(\frac{u}{K}\right)^2 \ln\left(\overline{F_I}\left(\frac{u}{K}\right)\right).
\end{aligned}$$

Summan (6.8) toiselle termille löydetään yläraja vastaavalla tavalla. Kun $\frac{u}{K} < Y_{(K-1)} \leq \frac{u}{2}$, niin $\max(u - S_{(K-1)}, Y_{(K-1)}) > \frac{u}{K}$, jolloin $\overline{F_I}(\max(u - S_{(K-1)}, Y_{(K-1)})) \leq \overline{F_I}\left(\frac{u}{K}\right)$. Tällöin saadaan

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left(\frac{\overline{F_I}(\max(u - S_{(K-1)}, Y_{(K-1)}))}{\overline{F_I}(Y_{(K-1)})}\right)^2 \mathbb{1}\left(\frac{u}{K} < Y_{(K-1)} \leq \frac{u}{2}\right) \middle| K\right) \\
&\leq \overline{F_I}\left(\frac{u}{K}\right)^2 \int_{\frac{u}{K}}^{\frac{u}{2}} \frac{f_{Y_{(K-1)}}(x)}{\overline{F_I}(x)^2} dx \\
&\leq -K(K-1)\overline{F_I}\left(\frac{u}{K}\right)^2 \left(\ln\left(\overline{F_I}\left(\frac{u}{2}\right)\right) - \ln\left(\overline{F_I}\left(\frac{u}{K}\right)\right)\right).
\end{aligned}
$$

Summan (6.8) kolmannen termin ylärajaksi löydetään

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\mathbb{1}\left(Y_{(K-1)} > \frac{u}{2}\right) |K\right) \\
&= \int_{\frac{u}{2}}^{\infty} f_{Y_{(K-1)}}(x) dx \\
&= \int_{\frac{u}{2}}^{\infty} K(K-1) F_I(x)^{K-2} \overline{F_I}(x) f_I(x) dx \\
&\leq K(K-1) \int_{\frac{u}{2}}^{\infty} \overline{F_I}(x) f_I(x) dx \\
&= -K(K-1) \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2}\left(\overline{F_I}(M) - \overline{F_I}\left(\frac{u}{2}\right)\right) \\
&= K(K-1)\frac{1}{2}\overline{F_I}\left(\frac{u}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Yhdistämällä selvitetyt ylärajat saadaan

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z^2 \mid K) &\leq K(K-1)\left(\frac{1}{2}\overline{F_I}\left(\frac{u}{2}\right)^2 - \overline{F_I}\left(\frac{u}{K}\right)^2 \ln\left(\overline{F_I}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\right) \\
&\leq K^2\left(\frac{1}{2}\overline{F_I}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \overline{F_I}\left(\frac{u}{K}\right)^2 \left|\ln\left(\overline{F_I}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\right|\right).
\end{aligned}
$$

Ottamalla tästä odotusarvo päädytään haluttuun Z:n varianssin ylärajaan

$$
\sigma_Z^2 \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z^2 \mid K)) \leq \mathbb{E}\left(K^2\left(\frac{1}{2}\overline{F_I}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \overline{F_I}\left(\frac{u}{K}\right)^2 \left|\ln\left(\overline{F_I}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\right|\right)\right).
$$

□

Lemma 6.9. *Jos $\overline{F_I}(x) = \frac{L(x)}{x^\alpha}$ ja $L(x) \in \mathcal{R}_0$, indeksillä $\alpha \in \mathbb{R}$, niin tällöin kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa vakiot $C_-(\varepsilon)$ ja $C_+(\varepsilon)$, joille pätee*

$$
C_-(\varepsilon)x^{-\alpha-\varepsilon} \leq \overline{F_I}(x) \leq C_+(\varepsilon)x^{-\alpha+\varepsilon},
$$

kaikille $x > 0$.

Todistus. Olkoon $\overline{F_I}(x) = \frac{L(x)}{x^\alpha}$ ja $L(x) \in \mathcal{R}_0$. Tällöin $\overline{F_I}(x)x^{\alpha-\varepsilon} = x^{-\varepsilon}L(x)$, mistä seuraa, että $L(x)$ on jatkuva, sekä

$$\lim_{x\to 0} x^{-\varepsilon}L(x) = 0.$$

Lisäksi koska $L(x) \in \mathcal{R}_0$, niin

$$\lim_{x\to \infty} x^{-\varepsilon}L(x) = 0.$$

Tämän perusteella on olemassa vakio $C_+(\varepsilon)$, jolle pätee $x^{-\varepsilon}L(x) \leq C_+(\varepsilon)$ eli $L(x) \leq C_+(\varepsilon)x^\varepsilon$ kaikille x. Joten saadaan yläraja

$$\overline{F_I}\left(x\right) = \frac{L\left(x\right)}{x^\alpha} \leq \frac{C_+(\varepsilon)x^\varepsilon}{x^\alpha} = C_+(\varepsilon)x^{-\alpha+\varepsilon}.$$

Jos $L(x) \in \mathcal{R}_0$, niin $\frac{1}{L(x)} \in \mathcal{R}_0$, sillä

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{f(cx)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{f(cx)} = 1,$$

kaikilla $c > 0$, kun $f \in \mathcal{R}_0$. Tällöin

$$\overline{F_I}\left(x\right) = \frac{\frac{1}{L(x)}}{x^\alpha} = \frac{1}{L\left(x\right)x^\alpha} \geq \frac{1}{C_+(\varepsilon)x^\varepsilon x^\alpha}.$$

Merkitsemällä

$$C_-(\varepsilon) = \frac{1}{C_+(\varepsilon)},$$

saadaan alaraja

$$\overline{F_I}\left(x\right) \geq \frac{C_-(\varepsilon)}{x^\varepsilon x^\alpha} = C_-(\varepsilon)x^{-\alpha-\varepsilon}.$$

□

Lemma 6.10. *Jos $\overline{F_I}(x) = \frac{L(x)}{x^\alpha}$ ja $L(x) \in \mathcal{R}_0$, indeksillä $\alpha \in \mathbb{R}$, niin tällöin kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa vakiot $D_1(\varepsilon)$ ja $D_2(\varepsilon)$, joille pätee*

$$\mathbb{E}(Z^2) \leq (D_1(\varepsilon) + D_2(\varepsilon)|\ln(u)|)u^{2\varepsilon-2\alpha}.$$

Todistus. Olkoon $\overline{F_I}(x) = \frac{L(x)}{x^\alpha}$ ja $L(x) \in \mathcal{R}_0$. Lemman 6.7 perusteella

$$\mathbb{E}(Z^2) \leq \mathbb{E}\left(K^2\left(\frac{1}{2}\overline{F_I}^2\left(\frac{u}{2}\right) + \overline{F_I}^2\left(\frac{u}{K}\right)\left|\ln \overline{F_I}\left(\frac{u}{2}\right)\right|\right)\right).$$

Koska $|\ln(x_1)| \geq |\ln(x_2)|$, kun $0 < x_1 \leq x_2 \leq 1$, niin edelleen lemman 6.9 avulla saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z^2) &\leq \mathbb{E}(K^2)\frac{1}{2}C_+(\varepsilon)^2\left(\frac{u}{2}\right)^{-2\alpha+2\varepsilon} + \mathbb{E}\left(K^2C_+(\varepsilon)^2\left(\frac{u}{K}\right)^{-2\alpha+2\varepsilon}\left|\ln\left(C_-(\varepsilon)\left(\frac{u}{2}\right)^{-(\alpha+\varepsilon)}\right)\right|\right) \\ &= \mathbb{E}(K^2)\frac{1}{2}C_+(\varepsilon)^2\left(\frac{u}{2}\right)^{-2\alpha+2\varepsilon} + \mathbb{E}\left(K^{2\alpha-2\varepsilon+2}\right)C_+(\varepsilon)^2u^{-2\alpha+2\varepsilon}\left|\ln\left(C_-(\varepsilon)\left(\frac{u}{2}\right)^{-(\alpha+\varepsilon)}\right)\right|.\end{aligned}$$

Itseisarvon ja logaritmin ominaisuuksien perusteella

$$\begin{aligned}\left|\ln\left(C_-(\varepsilon)\left(\frac{u}{2}\right)^{-(\alpha+\varepsilon)}\right)\right| &= \left|\ln\left(C_-(\varepsilon)2^{\alpha+\varepsilon}u^{-(\alpha+\varepsilon)}\right)\right| \\ &\leq \left|\ln\left(C_-(\varepsilon)2^{\alpha+\varepsilon}\right)\right| + \left|-(\alpha+\varepsilon)\ln(u)\right| \\ &= \left|\ln\left(C_-(\varepsilon)2^{\alpha+\varepsilon}\right)\right| + (\alpha+\varepsilon)\left|\ln(u)\right|,\end{aligned}$$

joten saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z^2) &\leq \mathbb{E}(K^2)\frac{1}{2}C_+(\varepsilon)^2 2^{2\alpha-2\varepsilon}u^{-2\alpha+2\varepsilon} \\ &+ \mathbb{E}\left(K^{2\alpha-2\varepsilon+2}\right)C_+(\varepsilon)^2u^{-2\alpha+2\varepsilon}\left(\left|\ln\left(C_-(\varepsilon)2^{\alpha+\varepsilon}\right)\right| + (\alpha+\varepsilon)\left|\ln(u)\right|\right) \\ &= \left(D_1(\varepsilon) + D_2(\varepsilon)|\ln(u)|\right)u^{-2\alpha+2\varepsilon},\end{aligned}$$

missä

$$D_1(\varepsilon) = \mathbb{E}(K^2)\frac{1}{2}C_+(\varepsilon)^2 2^{2\alpha-2\varepsilon} + \mathbb{E}(K^{2\alpha-2\varepsilon+2})C_+(\varepsilon)^2|\ln(C_-(\varepsilon)2^{\alpha+\varepsilon}|$$

ja

$$D_2(\varepsilon) = \mathbb{E}(K^{2\alpha-2\varepsilon+2})C_+(\varepsilon)^2(\alpha+\varepsilon).$$

□

6.1 Lauseen 6.6 todistus

Todistetaan lause 6.6, jonka mukaan Algoritmin I estimaattori on logaritmisesti tehokas.

Todistus. Olkoon $\overline{F_I}(x) = \frac{L(x)}{x^\alpha}$ indeksillä $\alpha > 1$ ja $L(x) \in \mathcal{R}_0$. Lemman 6.10 perusteella

$$\begin{aligned}\ln\sigma_Z &= \ln\left(\sqrt{\mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2}\right) \\ &\leq \ln\left(\sqrt{\mathbb{E}(Z^2)}\right) \\ &\leq \ln\left(\sqrt{(D_1(\varepsilon) + D_2(\varepsilon)|\ln(u)|)u^{2\varepsilon-2\alpha}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(D_1(\varepsilon) + D_2(\varepsilon)|\ln(u)|\right) + \frac{1}{2}\log\left(u^{2\varepsilon-2\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(D_1(\varepsilon) + D_2(\varepsilon)|\ln(u)|\right) + (\varepsilon-\alpha)\ln(u).\end{aligned}$$

Tiedetään, että $\ln\psi(u) < 0$, sillä $\psi(u)$ on vararikkotodennäköisyys, eli $0 < \psi(u) < 1$. Tämän perusteella saadaan

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\ln\sigma_Z}{\ln\psi(u)} \geq \liminf_{u\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln\left(D_1(\varepsilon) + D_2(\varepsilon)|\ln(u)|\right) + (\varepsilon-\alpha)\ln(u)}{\ln\psi(u)}.$$

Lauseen 4.14 tulosta hyödyntäen päästään muotoon

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\ln\sigma_Z}{\ln\psi(u)} \geq \liminf_{u\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln\left(D_1(\varepsilon) + D_2(\varepsilon)|\ln(u)|\right) + (\varepsilon-\alpha)\ln(u)}{\ln\left(\frac{\overline{F_I}(u)}{\theta}\right)}.$$

Oletuksien mukaan $\overline{F_I}(x) = \frac{L(x)}{x^\alpha}$, joten alkupääoman kasvaessa raja-arvoksi saadaan

$$\begin{aligned}
\liminf_{u\to\infty} \frac{\ln\sigma_Z}{\ln\psi(u)} &\geq \liminf_{u\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln\left(D_1(\varepsilon) + D_2(\varepsilon)|\ln(u)|\right) + (\varepsilon-\alpha)\ln(u)}{\ln\left(\frac{L(u)}{u^\alpha\theta}\right)} \\
&= \liminf_{u\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln\left(D_1(\varepsilon) + D_2(\varepsilon)|\ln(u)|\right) + (\varepsilon-\alpha)\ln(u)}{-\ln(\theta) + \ln(L(u)) - \alpha\ln(u)} \\
&= \frac{\varepsilon-\alpha}{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Mielivaltaisen ε:n laskiessa kohti nollaa päädytään haluttuun tulokseen

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\ln\sigma_Z}{\ln\psi(u)} \geq \frac{-\alpha}{-\alpha} = 1.$$

$\square$

Luku 7

Simulointi

Havainnollistetaan tutkielman aihepiiriä soveltamalla kappaleessa 6 löydettyä Algorimi I:stä vararikkotodennäköisyyksien $\psi(u)$ arviointiin. Teoksen [7] perusteella todelliseen korvausvaadedataan sopivia jakaumia ovat vain Pareto-jakauma ja Log-normaalijakauma, joten rajoitutaan simuloinnissa niihin. Tuotetaan simuloimalla arvioita vararikkotodennäköisyyksille $\psi(u)$ eri alkupääoman u arvoilla, määritetään arviolle 95%:n luottamusväli kaavan (5.3) avulla, sekä mitataan arvion tarkkuutta tuloksen 5.12 mielessä käyttäen estimaattorin otosvarianssia s. Suoritetaan simulointikierroksia $n = 1000$ kappaletta muodostaen tämän laajuinen otos ja esitetään tulokset taulukoissa 7.1 ja 7.2.

Karkeassa Monte Carlo -menetelmässä vaadittavien simulointikierrosten määrä, eli otoskoon lajuus, saatiin kaavalla (5.9). Tarkastellaan myös tätä menetelmää käytettäessä tarvittavaa otoskoon laajutta, kun haluttu suhteellinen tarkkuus on 10% ja tarkasteltava todennäköisyys Algoritmi I:llä muodostettu estimaatti, jolloin sitä voidaan verrata Algoritmi I:ssä käytettyyn simulointikierrosten määrään n. Merkitään tätä vaadittua otoskoon suuruutta $\hat{N}$:llä.

Pareto-jakauma on säännöllisesti vaihteleva, joten lauseen 6.6 oletukset ovat voimassa ja näin ollen Algoritmi I on käyttökelpoinen. $Pareto(a, b)$-jakaumalle pätee

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^b & , \text{kun } x \geq a \\ 0 & , \text{kun } x < a \end{cases} , \tag{7.1}$$

sekä

$$\mu = \frac{ab}{b-1}, \tag{7.2}$$

missä μ on jakauman odotusarvo. Joten siis saadaan

$$F_I(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a^{b-1}}{bx^{b-1}} & , \text{kun } x \geq a \\ \frac{x(b-1)}{ab} & , \text{kun } x < a \end{cases} \tag{7.3}$$

Julkaisussa [16] on laskettu vararikkotodennäköisyyksille arviot Panjerin rekursiomenetelmällä korvausvaateiden ollessa $Pareto(1,2)$-jakautuneet, joten käytetään simuloinnissa vastaavia parametrien arvoja, jolloin muodostettuja arvioita voidaan verrata julkaisun [16] arvoihin.

$Pareto(1,2)$, $\theta = 0,1$, $n = 1000$				
u	$\psi(u) \pm 1,96\frac{s}{\sqrt{n}}$	$\frac{\ln s}{\ln \psi(u)}$	$\psi_P(u)$	$\hat{N}$
$u = 10$	$(5,3 \pm 0,3) \cdot 10^{-1}$	$1,30$	$5,5 \cdot 10^{-1}$	725
$u = 100$	$(7,1 \pm 1,0) \cdot 10^{-2}$	$0,68$	$8,5 \cdot 10^{-2}$	5 411
$u = 500$	$(1,2 \pm 0,3) \cdot 10^{-2}$	$0,70$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	32 013
$u = 1000$	$(4,7 \pm 0,6) \cdot 10^{-3}$	$0,87$	$5,4 \cdot 10^{-3}$	81 736

Taulukko 7.1: Simuloidut vararikkotodennäköisyydet ja niiden tarkkuudet lauseen 5.12 mielessä Pareto-jakautuneille korvausvaateille, sekä julkaisussa [16] lasketut vertailuarvot $\psi_P(u)$.

Log-normaalijakauma ei ole säännöllisesti vaihteleva, mutta voidaan osoittaa, että lauseen 6.6 tulos pätee myös sille. Log-normaalijakaumalle $Lognormal(\alpha, \beta)$ pätee

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \alpha}{\beta}\right), \tag{7.4}$$

sekä

$$\mu = e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}}, \tag{7.5}$$

missä μ on jakauman odotusarvo ja $\Phi(x)$ standardinormaalijakauman kertymäfunktio. Lisäksi integroidulle häntäjakaumalle on olemassa käytännöllinen esitys

$$F_I(x) = \frac{x - x\Phi\left(\frac{\ln(x)-\alpha}{\beta}\right) + \mu\Phi\left(\frac{\ln(x)-\alpha}{\beta} - \beta\right)}{\mu}. \tag{7.6}$$

Julkaisussa [17] on laskettu vararikkotodennäköisyyksille tarkat arvot korvausvaateiden ollessa $Lognormal(-1,62, 1,8)$-jakautuneet, joten käytetään vastaavia parametriarvoja, jolloin simuloinnilla tuotettuja arvioita voidaan verrata julkaisun [17] tarkkoihin todennäköisyyksiin.

$Lognormal(-1,62,1,8)$, $\theta = 0,1$, $n = 1000$				
u	$\psi(u) \pm 1,96\frac{s}{\sqrt{n}}$	$\frac{\ln s}{\ln \psi(u)}$	$\psi_R(u)$	$\hat{N}$
$u = 100$	$(2,9 \pm 0,2) \cdot 10^{-1}$	$0,79$	$3,4 \cdot 10^{-1}$	1 325
$u = 1000$	$(9,7 \pm 3,2) \cdot 10^{-3}$	$0,64$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	39 604
$u = 10000$	$(3,2 \pm 0,5) \cdot 10^{-5}$	$0,91$	$4 \cdot 10^{-5}$	12 005 000

Taulukko 7.2: Simuloidut vararikkotodennäköisyydet ja niiden tarkkuudet lauseen 5.12 mielessä Log-normaalijakautuneille korvausvaateille, sekä julkaisussa [17] lasketut vertailuarvot $\psi_R(u)$.

Liite A

MATLAB-koodit

Tässä liitteessä esitetään MATLAB-simuloinnissa käytetyt koodit.

A.1 Pareto-jakautuneet korvausvaateet

```
function paretoruin(u,p,n,a,b);
z=[];
for i=1:n
y=[];
K=random('Geometric',p);
for j=1:K
    U=random('Uniform',0,1);
    if U<((b-1)/b)
        yn=(a.*b.*U)/(b-1);
    else
        yn=a/(b.*(1-U)).^(1/(b-1));
    end
    y=[y yn];
end
    if K<2
        if u<a
            zn=1-(((b-1).*u)/(a.*b));
        else
            zn=(a.^(b-1))/(b.*((u).^(b-1)));
        end
    else
        x=sort(y);
        m=max(u-(sum(x(1:1,1:(K-1)))),x(1:1,(K-1):(K-1)));
```

```
        if m<a
           if x(1:1,(K-1):(K-1))<a
               zn=(1-(((b-1).*m)/(a.*b)))/(1-(((b-1)
                  .*x(1:1,(K-1):(K-1)))/(a.*b)));
           else
               zn=(1-(((b-1).*m)/(a.*b)))/((a.^(b-1))
                  /(b.*(x(1:1,(K-1):(K-1)).^(b-1))));
           end
        else
            if x(1:1,(K-1):(K-1))<a
               zn=(a^(b-1))/(b.*(m.^(b-1)))
                  /(1-(((b-1).*x(1:1,(K-1):(K-1)))/(a.*b)));
            else
               zn=(a^(b-1))/(b.*(m.^(b-1)))
                  /((a.^(b-1))/(b.*(x(1:1,(K-1):(K-1)).^(b-1))));
            end
        end
    end
z=[z zn];
end
ruinprob=sum(z)/n
s=[];
for l=1:n
    sn=(z(1:1,l:l)-ruinprob).^2;
    s=[s sn];
end
summa=sum(s)/(n-1);
confid=1.96.*realsqrt(summa/n)
error=(log(realsqrt(summa))/log(ruinprob))
```

A.2 Log-normaalijakautuneet korvausvaateet

```
function lognorruin(u,p,n,m,s);
z=[];
x=0:0.01:10010;
f=x-x.*cdf('Normal',((log(x)-m)/s),0,1)+cdf('Normal',(((log(x)-m)/s)-s),0,1);
for i=1:n
y=[];
K=random('geometric',p);
for j=1:K
    U=random('Uniform',0,1);
```

```
    yn=interp1(f,x,U);
    y=[y yn];
end;
    if K<2
        zn=(1-(u-u.*cdf('Normal',((log(u)-m)/s),0,1)+exp(m+(s.^2/2))
           .*cdf('Normal',(((log(u)-m)/s)-s),0,1))/exp(m+(s.^2/2)));
    else
        h=sort(y);
        a=max(u-(sum(h(1:1,1:(K-1)))),h(1:1,(K-1):(K-1)));
        zn=(1-((a-a.*cdf('Normal',((log(a)-m)/s),0,1)+exp(m+(s.^2/2))
           .*cdf('Normal',(((log(a)-m)/s)-s),0,1))/exp(m+(s.^2/2))))
           /(1-((h(1:1,(K-1):(K-1))-h(1:1,(K-1):(K-1))
           .*cdf('Normal',((log(h(1:1,(K-1):(K-1)))-m)/s),0,1)+exp(m+(s.^2/2))
           .*cdf('Normal',(((log(h(1:1,(K-1):(K-1)))-m)/s)-s),0,1))
           /exp(m+(s.^2/2))));
    end
    z=[z zn];
end
ruinprob=sum(z)/n
s=[];
for l=1:n
    sn=(z(1:1,l:l)-ruinprob).^2;
    s=[s sn];
end
summa=sum(s)/(n-1);
confid=1.96.*realsqrt(summa/n)
error=(log(realsqrt(summa))/log(ruinprob))
```

Kirjallisuutta

[1] Pekka Tuominen: Todennäköisyyslaskenta I, 10. painos, Limes ry, 2010.

[2] Petri Koistinen: Todennäköisyyslaskenta, luentomoniste, Helsingin yliopisto, 2013.

[3] James R. McCord ja Richard M. Moroney: Introduction to Probability Theory, Macmillan, 1964.

[4] Patrick Billingsley: Probability and Measure, Wiley, 1995.

[5] Harri Nyrhinen: Riskiteoria, luentomoniste, Helsingin yliopisto, 2015.

[6] Wolf-Rüdiger Heilman: Fundamentals of Risk Theory, Verlag Versicherungswirtschaft, 1988.

[7] Paul Embrechts, Claudia Klüppelberg ja Thomas Mikosch: Modelling Extremal Events, Springer, 1997.

[8] Sergey Foss, Dmitry Korshunov ja Stan Zachary: An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions, Springer, 2011.

[9] Tomasz Rolski, Hanspeter Schmidli, Volker Schmidt ja Jozef Teugels: Stochastic Processes for Insurance and Finance, Wiley, 1999.

[10] Emanuel Parzen: Stochastic processes, Holden-Day, 1962.

[11] Jan Grandell: Mixed Poisson Processes, Chapman & Hall, 1997.

[12] Rob Kaas, Marc Goovaerts, Jan Dhaene ja Michel Denuit: Modern Actuarial Risk Theory, Kluwer Academic Publishers, 2001.

[13] Pekka Nieminen ja Pentti Saikkonen: Tilastollisen päättelyn kurssi, luentomoniste, Helsingin yliopisto, 2013.

[14] Søren Asmussen ja Peter W. Glynn: Stochastic Simulation, Springer, 2007.

[15] Barry C. Arnold, N. Balakrishnan ja H. N. Nagaraja: A First Course in Order Statistics, Wiley, 1993.

[16] S. Asmussen ja K. Binswanger: Simulation of Ruin Probabilities for Subexponential Claims, ASTIN Bullettin: The Journal of the International Actuarial Association, 1997.

[17] O. Thorin ja N. Wikstad: Calculation of Ruin Probabilities when the Claim Distribution is Lognormal, ASTIN Bullettin: The Journal of the International Actuarial Association, 1979.

[18] Søren Asmussen ja Hansjörg Albrecher: Ruin Probabilities, World Scientific, 2010.